**Analisi Matematica II**
**Corso di Ingegneria Gestionale**
**Compito del 18-09-2017**

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

**Esercizio 1. (12 punti)** Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^3 - 4y$$

i) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 - 4y}$$

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + 2y^2 \leq 1\right\} .$$

**Esercizio 2. (10 punti)** Dato l'insieme

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \, , \, y \geq 2 - 2(1+\sqrt{2})x\right\}$$

i) scrivere una parametrizzazione regolare per le parti del bordo di $U$;

ii) detta $(\gamma, I)$ una curva semplice e di classe $C^1$ a tratti, che ha come sostegno il bordo di $U$ percorso in senso anti-orario, calcolare il lavoro lungo $(\gamma, I)$ del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -xy + \sin x \\ \frac{x^2}{2} + \log(1 + e^{y^2+1}) \end{pmatrix}$$

**Esercizio 3. (8 punti)** Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 3x^2 - 2x^3 + y^2 + y^4 + z^3 - 4z^4 = 0\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a $\Sigma$ nel punto $P = (1\,,\,1\,,\,1)$;

ii) trovare una parametrizzazione locale della superficie $\Sigma$ in un intorno del punto $P$.

## Svolgimento

**Esercizio 1.** *Data la funzione*

$$f(x,y) = x^2 + y^3 - 4y$$

*i) dire se esiste il limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2-4y}$$

La funzione di cui bisogna studiare il limite è definita in $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{x^2 - 4y = 0\}$, dunque l'origine è un punto di accumulazione per $D$ e ha senso studiare il limite. Possiamo osservare che

$$\frac{f(x,y)}{x^2-4y} = \frac{x^2+y^3-4y}{x^2-4y} = 1 + \frac{y^3}{x^2-4y}$$

e dunque studiamo solo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2-4y}$$

Iniziamo a studiare il comportamento lungo le rette della forma $y = \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Si trova

$$\lim_{y=\lambda x,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2-4y} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^3 x^3}{x^2 - 4\lambda x} = 0 \qquad \forall\,\lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Lo stesso vale restringendoci all'asse $x$, ossia ponendo $y = 0$. Consideriamo poi il limite lungo le curve del tipo $y = x^\alpha$ con $\alpha > 0$. Si trova

$$\lim_{y=x^\alpha,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2-4y} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{3\alpha}}{x^2-4x^\alpha} = \begin{cases} \lim_{x\to 0} \frac{x^{3\alpha}}{-4x^\alpha} = 0\,, & \text{se } \alpha < 2 \\ \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{-3x^2} = 0\,, & \text{se } \alpha = 2 \\ \lim_{x\to 0} \frac{x^{3\alpha}}{x^2} = 0\,, & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

Come ultima direzione consigliata per lo studio del limite, scegliamo le curve "tangenti" alla direzione $x^2 = 4y$ che annulla in denominatore. Poniamo quindi $4y = x^2 + x^\beta$, con $\beta > 2$. Si trova

$$\lim_{4y=x^2+x^\beta,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2-4y} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+x^\beta)^3}{-4^3\,x^\beta} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{-4^3\,x^\beta} \neq 0 \quad \text{per } \beta \geq 6\,.$$

Abbiamo dunque dimostrato che il limite non esiste.

*ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su*

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 2y^2 \leq 1\right\}\,.$$

L'insieme $\Omega$ è rappresentato nella figura 1. Per studiare massimo e minimo assoluto di $f$ su $\Omega$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui

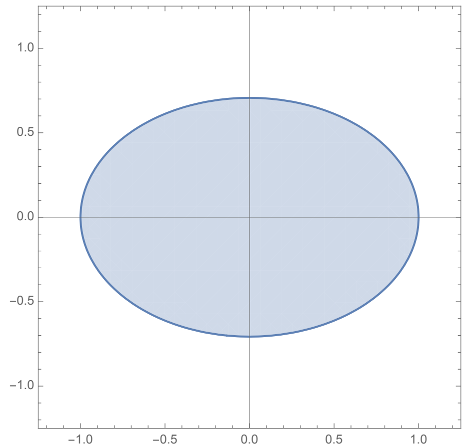


Figure 1: L'insieme $\Omega$.

punti critici liberi interni a $\Omega$ , sui punti critici vincolati al bordo di $\Omega$ e sugli eventuali spigoli del bordo.

La funzione è un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque è anche differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x, y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 3y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Dunque i punti critici risultano essere

$$C_1 = \left(0\,,\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \qquad C_2 = \left(0\,,\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

e sono entrambi esterni ad $\Omega$, dunque non vanno considerati.

Ci rimane da studiare il comportamento di $f$ sul bordo di $\bar{\Omega}$. Possiamo non considerare spigoli sul bordo dell'insieme, possiamo infatti scrivere il bordo come

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 2y^2 = 1\right\}$$

quindi insieme di livello della funzione differenziabile $G(x, y) = x^2 + 2y^2$. Il gradiente di $G$ non si annulla su $\Gamma$, e possiamo quindi applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e cercare soluzioni $(x, y, \lambda)$ del sistema

$$\begin{cases} 2x = \lambda\, 2x \\ 3y^2 - 4 = \lambda\, 4y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Studiando la prima equazione otteniamo che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3y^2 - 4 = \lambda\, 4y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \qquad \bigcup \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ \lambda = 1 \\ 3y^2 - 4y - 4 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

Dal primo sotto-sistema si ottengono i primi due punti critici vincolati

$$Q_1 = \left(0\,,\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad Q_2 = \left(0\,,\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Nel secondo sotto-sistema, le soluzioni della seconda equazione sono $y_1 = -\frac{2}{3}$ e $y_2 = 2$, e sostituendo nella terza troviamo i punti

$$Q_3 = \left(\frac{1}{3}\,,\,-\frac{2}{3}\right) \qquad Q_4 = \left(-\frac{1}{3}\,,\,-\frac{2}{3}\right)$$

corrispondenti a $y_1$, mentre non si trovano soluzioni corrispondenti a $y_2$ (infatti l'insieme $\Omega$ non interseca la retta $y = 2$).

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(Q_1) = -\frac{7\sqrt{2}}{4}\,, \quad f(Q_2) = \frac{7\sqrt{2}}{4}\,, \quad f(Q_3) = f(Q_4) = \frac{67}{27}$$

Dunque il massimo di $f$ è $\frac{67}{27}$ e il minimo è $-\frac{7\sqrt{2}}{4}$.

**Esercizio 2.** *Dato l'insieme*

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\,,\, y \geq 2 - 2(1+\sqrt{2})x\right\}$$

*i) scrivere una parametrizzazione regolare per le parti del bordo di $U$;*

L'insieme $U$ è rappresentato nella figura 2. Gli spigoli del bordo sono i punti

$$S_1 = (0\,,\,2) \quad \text{e} \quad S_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,-\sqrt{2}\right)$$

Possiamo dividere il bordo in due parti

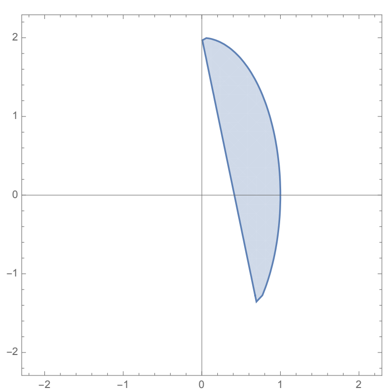


Figure 2: L'insieme $U$.

$$\Gamma_1 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \,,\, y \geq 2 - 2(1+\sqrt{2})x \right\}$$

$$\Gamma_2 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = 2 - 2(1+\sqrt{2})x \,,\, 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$\Gamma_1$ è una parte dell'ellisse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, che si può parametrizzare usando la funzione

$$\gamma_1(t) = (\cos t \,,\, 2 \sin t)$$

e restringiamo l'angolo $t$ all'intervallo individuato dai due punti $S_1$ e $S_2$. Usando la parametrizzazione $\gamma_1$ si trova

$$S_1 = \gamma_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad S_2 = \gamma_1\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

Quindi la parametrizzazione di $\Gamma_1$ è

$$\gamma_1 : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2 \,, \qquad \gamma_1(t) = \Big(\cos t \,,\, 2 \sin t\Big)$$

$\Gamma_2$ è il segmento $\overline{S_1 S_2}$, quindi possiamo usare la parametrizzazione standard dei segmenti, o semplicemente usare la parametrizzazione della retta $y = 2 - 2(1+\sqrt{2})x$ e restringerla all'intervallo $[0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$. Seguendo la seconda strada poniamo

$$\gamma_2 : \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \to \mathbb{R}^2 \,, \qquad \gamma_2(t) = \Big(t \,,\, 2 - 2(1+\sqrt{2})t\Big)$$

*ii) detta $(\gamma, I)$ una curva semplice e di classe $C^1$ a tratti, che ha come sostegno il bordo di $U$ percorso in senso anti-orario, calcolare il lavoro lungo $(\gamma, I)$ del campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -xy + \sin x \\ \frac{x^2}{2} + \log(1 + e^{y^2+1}) \end{pmatrix}$$

Il campo $\mathbf{F}$ è differenziabile sul suo dominio naturale $\mathbb{R}^2$, e la curva $(\gamma, I)$ è chiusa per definizione (essendo la parametrizzazione del bordo), dunque sono verificate tutte le ipotesi del Teorema del Rotore. Possiamo quindi scrivere

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = \iint_U \mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y)\, dxdy$$

Calcoliamo innanzitutto il rotore del campo

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 2x \,.$$

Osserviamo poi che possiamo scrivere $U$ come insieme semplice rispetto alla $x$ ponendo

$$U = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -\sqrt{2} \leq y \leq 2 \,,\, \frac{2-y}{2(1+\sqrt{2})} \leq x \leq \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} \right\} .$$

Dunque

$$L(\mathbf{F},\gamma)=\iint_U \operatorname{rot}(\mathbf{F})(x,y)\,dxdy=\int_{-\sqrt{2}}^{2}\left(\int_{\frac{2-y}{2(1+\sqrt{2})}}^{\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}} 2x\,dx\right)dy=$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{2}\left(1-\frac{y^2}{4}-\frac{(2-y)^2}{4(3+2\sqrt{2})}\right)dy=\left(y-\frac{y^3}{12}+\frac{(2-y)^3}{12(3+2\sqrt{2})}\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{2}=$$

$$=1+\frac{2}{3}\sqrt{2}\,.$$

**Esercizio 3.** *Data la superficie*

$$\Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,3x^2-2x^3+y^2+y^4+z^3-4z^4=0\right\}$$

*i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a $\Sigma$ nel punto $P=(1\,,\,1\,,\,1)$;*

Possiamo considerare $\Sigma$ come insieme di livello della funzione differenziabile

$$F(x,y,z)=3x^2-2x^3+y^2+y^4+z^3-4z^4$$

che verifica

$$\nabla F(x,y,z)=\begin{pmatrix}6x-6x^2\\ 2y+4y^3\\ 3z^2-16z^3\end{pmatrix}\quad\text{e}\quad\nabla F(P)=\nabla F\,(1\,,\,1\,,\,1)=\begin{pmatrix}0\\ 6\\ -13\end{pmatrix}\neq\underline{0}$$

Quindi $P$ è un punto regolare per $\Sigma$, e l'equazione cartesiana del piano tangente a $\Sigma$ in $P$ è data da

$$6\,(y-1)-13\,(z-1)=0\,.$$

*ii) trovare una parametrizzazione locale della superficie $\Sigma$ in un intorno del punto $P$.*

Per il Teorema delle Funzioni Implicite, siamo certi di poter trovare una parametrizzazione locale di $\Sigma$ come grafico di una funzione in un intorno dei punti in cui non si annulla il gradiente di $F$, condizione verificata nel punto $P$.

Poiché

$$\frac{\partial F}{\partial y}(P)\neq 0\quad\text{e}\quad\frac{\partial F}{\partial z}(P)\neq 0\,,$$

possiamo scegliere se applicare il teorema rispetto alla $y$ o rispetto alla $z$.

Se scegliamo di applicarlo rispetto alla $y$, otteniamo che esistono un intorno $U(1,1)$, un intorno $V(1)$ ed una funzione $g(x,z):U\to V$ tale che $g(1,1)=1$ e $F(x,g(x,z),z)=0$ per ogni $(x,z)\in U$. Quindi $\Sigma$ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione $g$. Dall'equazione

$$F(x,g(x,z),z)=0\quad\Leftrightarrow\quad 3x^2-2x^3+g(x,z)^2+g(x,z)^4+z^3-4z^4=0$$

con la condizione $g(1,1) = 1$, troviamo (ponendo inizialmente $t = g(x,z)^2$)

$$g(x,z) = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 - 4(3x^2 - 2x^3 + z^3 - 4z^4)}}{2}}$$

La parametrizzazione locale di $\Sigma$ è quindi data da

$$\sigma(u,v) = (u,\, g(u,v),\, v)$$

con $(u,v) \in U$, dove

$$g(u,v) = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 - 4(3u^2 - 2u^3 + v^3 - 4v^4)}}{2}}\,.$$

Se scegliamo di applicare invece il Teorema delle Funzioni Implicite rispetto alla $z$, otteniamo che esistono un intorno $U(1,1)$, un intorno $V(1)$ ed una funzione $h(x,y) : U \to V$ tale che $h(1,1) = 1$ e $F(x,y,h(x,y)) = 0$ per ogni $(x,y) \in U$. Quindi $\Sigma$ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione $h$. Dall'equazione

$$F(x,y,h(x,y)) = 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 2x^3 + y^2 + y^4 + h(x,y)^3 - 4h(x,y)^4 = 0$$

Non risulta tuttavia agevole in questo caso ottenere l'espressione esplicita della funzione $h(x,y)$.