Algebra Lineare
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 18-06-2011

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche il testo del compito e i fogli di brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (6 punti) Trovare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} (z-1-i)^5 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z + \bar{z} \leq 2 \\ i(z-\bar{z}) \geq -2 \end{cases}$$

Esercizio 2. (8 punti)

i) Dire se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(L) = \{2x_1 + x_3 = 0\}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(L)$, e in caso affermativo scrivere la matrice associata a L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;

ii) Dire se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ tale che $\ker(T) = \mathrm{Span}(1-2t^2, t)$ e $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Span}(2+t^2)$, e in caso affermativo scrivere $T(1-2t+3t^2)$.

Esercizio 3. (8 punti) Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \right\} \quad \text{e} \quad W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

trovare la dimensione e una base di $U + W$ e $U \cap W$.

Esercizio 4. (6 punti) Usare il Teorema di Rouché-Capelli per studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_3 = k \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 1 - k \end{cases}$$

e scriverne le soluzioni esplicitamente per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esistono.

Esercizio 5. (6 punti) Dire se esiste, e in caso affermativo trovarla, una base che triangolarizza o diagonalizza la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Algebra Lineare
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 18-06-2011

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche il testo del compito e i fogli di brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (6 punti) Trovare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} (z-1+i)^5 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z+\bar{z} \leq 2 \\ i(z-\bar{z}) \leq -2 \end{cases}$$

Esercizio 2. (8 punti)

i) Dire se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(L) = \{x_1 + 2x_2 = 0\}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(L)$, e in caso affermativo scrivere la matrice associata a L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;

ii) Dire se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ tale che $\ker(T) = \mathrm{Span}(2-t, t^2)$ e $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Span}(1+2t)$, e in caso affermativo scrivere $T(1-2t+3t^2)$.

Esercizio 3. (8 punti) Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \right\} \quad \text{e} \quad W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

trovare la dimensione e una base di $U + W$ e $U \cap W$.

Esercizio 4. (6 punti) Usare il Teorema di Rouché-Capelli per studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 - k \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 = k \end{cases}$$

e scriverne le soluzioni esplicitamente per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esistono.

Esercizio 5. (6 punti) Dire se esiste, e in caso affermativo trovarla, una base che triangolarizza o diagonalizza la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Algebra Lineare
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 18-06-2011

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche il testo del compito e i fogli di brutta.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (6 punti) Trovare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} (z+1-i)^5 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z+\bar{z} \geq 2 \\ i(z-\bar{z}) \geq -2 \end{cases}$$

Esercizio 2. (8 punti)

i) Dire se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(L) = \{x_1 + 3x_3 = 0\}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(L)$, e in caso affermativo scrivere la matrice associata a L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;

ii) Dire se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ tale che $\ker(T) = \mathrm{Span}(3-t^2, t)$ e $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Span}(1+3t^2)$, e in caso affermativo scrivere $T(1-2t+3t^2)$.

Esercizio 3. (8 punti) Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \right\} \quad \text{e} \quad W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

trovare la dimensione e una base di $U + W$ e $U \cap W$.

Esercizio 4. (6 punti) Usare il Teorema di Rouché-Capelli per studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -3 \\ x_2 - x_3 = k \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -3 - k \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

e scriverne le soluzioni esplicitamente per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esistono.

Esercizio 5. (6 punti) Dire se esiste, e in caso affermativo trovarla, una base che triangolarizza o diagonalizza la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Algebra Lineare
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 18-06-2011

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche il testo del compito e i fogli di brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (6 punti) Trovare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} (z+1+i)^5 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z + \bar{z} \geq 2 \\ i(z - \bar{z}) \leq -2 \end{cases}$$

Esercizio 2. (8 punti)

i) Dire se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(L) = \{3x_1 + x_2 = 0\}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(L)$, e in caso affermativo scrivere la matrice associata a L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;

ii) Dire se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ tale che $\ker(T) = \mathrm{Span}(1-3t, t^2)$ e $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Span}(3+t)$, e in caso affermativo scrivere $T(1-2t+3t^2)$.

Esercizio 3. (8 punti) Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \right\} \quad \text{e} \quad W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

trovare la dimensione e una base di $U + W$ e $U \cap W$.

Esercizio 4. (6 punti) Usare il Teorema di Rouché-Capelli per studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 3k \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -4 - k \\ x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$$

e scriverne le soluzioni esplicitamente per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esistono.

Esercizio 5. (6 punti) Dire se esiste, e in caso affermativo trovarla, una base che triangolarizza o diagonalizza la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Svolgimento

- **Esercizio 1**

Compito 1. *Trovare le soluzioni complesse del sistema*

$$\begin{cases} (z-1-i)^5 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z+\bar{z} \leq 2 \\ i(z-\bar{z}) \geq -2 \end{cases}$$

Scriviamo la prima equazione del sistema in forma esponenziale ponendo $w = z-1-i$, quindi

$$(z-1-i)^5 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad w^5 = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

da cui troviamo

$$w = \cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) \qquad k = 0,1,2,3,4$$

e quindi le soluzioni della prima equazione sono

$$z = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right) \qquad k = 0,1,2,3,4$$

La seconda e la terza condizione del sistema si traducono in

$$\mathrm{Re}(z) \leq 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z) \leq 1$$

quindi le soluzioni ammissibili sono quelle per cui

$$\cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) \leq 0 \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) \leq 0$$

da cui si ricava che l'unica soluzione del sistema è

$$z = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{6\pi}{5}\right) + i\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{20} + \frac{6\pi}{5}\right)\right)$$

Compito 2. *Trovare le soluzioni complesse del sistema*

$$\begin{cases} (z-1+i)^5 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z+\bar{z} \leq 2 \\ i(z-\bar{z}) \leq -2 \end{cases}$$

Scriviamo la prima equazione del sistema in forma esponenziale ponendo $w = z-1+i$, quindi

$$(z-1+i)^5 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad w^5 = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

da cui troviamo

$$w = \cos\left(\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right) \qquad k = 0,1,2,3,4$$

e quindi le soluzioni della prima equazione sono

$$z = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\left(-1 + \sin\left(\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right) \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

La seconda e la terza condizione del sistema si traducono in

$$\mathrm{Re}(z) \leq 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z) \geq 1$$

quindi le soluzioni ammissibili sono quelle per cui

$$\cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) \leq 0 \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) \geq 2$$

da cui si ricava che il sistema non ammette soluzioni.

Compito 3. *Trovare le soluzioni complesse del sistema*

$$\begin{cases} (z+1-i)^5 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z + \bar{z} \geq 2 \\ i(z - \bar{z}) \geq -2 \end{cases}$$

Scriviamo la prima equazione del sistema in forma esponenziale ponendo $w = z + 1 - i$, quindi

$$(z+1-i)^5 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad w^5 = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

da cui troviamo

$$w = \cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

e quindi le soluzioni della prima equazione sono

$$z = -1 + \cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right) \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

La seconda e la terza condizione del sistema si traducono in

$$\mathrm{Re}(z) \geq 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z) \leq 1$$

quindi le soluzioni ammissibili sono quelle per cui

$$\cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) \geq 2 \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) \leq 0$$

da cui si ricava che il sistema non ammette soluzioni.

Compito 4. *Trovare le soluzioni complesse del sistema*

$$\begin{cases} (z+1+i)^5 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z + \bar{z} \geq 2 \\ i(z - \bar{z}) \leq -2 \end{cases}$$

Scriviamo la prima equazione del sistema in forma esponenziale ponendo $w = z + 1 + i$, quindi

$$(z+1+i)^5 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \iff \quad w^5 = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

da cui troviamo

$$w = \cos\left(\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right) \qquad k = 0,1,2,3,4$$

e quindi le soluzioni della prima equazione sono

$$z = -1 + \cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\left(-1 + \sin\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right) \qquad k = 0,1,2,3,4$$

La seconda e la terza condizione del sistema si traducono in

$$\mathrm{Re}(z) \geq 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z) \geq 1$$

quindi le soluzioni ammissibili sono quelle per cui

$$\cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) \geq 2 \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) \geq 2$$

da cui si ricava che il sistema non ammette soluzioni.

- **Esercizio 2**

Compito 1. *i) Dire se esiste un'applicazione lineare* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tale che* $\ker(L) = \{2x_1 + x_3 = 0\}$ *e* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in Im(L)$*, e in caso affermativo scrivere la matrice associata a* L *rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$*;*

Il nucleo dell'applicazione ha dimensione 2 e dal Teorema della Dimensione troviamo quindi

$$3 = \dim(\mathrm{Im}(L)) + 2$$

il che implica che

$$\mathrm{Im}(L) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Per scrivere un'applicazione che soddisfi le richieste troviamo innanzitutto una base di $\ker(L)$ e la completiamo a base di $\mathbb{R}^3$. Si trova che

$$\ker(L) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

e una base di $\mathbb{R}^3$ è quindi per esempio

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Dobbiamo quindi imporre

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

dove per l'ultimo elemento della base abbiamo scelto come immagine il vettore che deve generare $\mathrm{Im}(L)$.

Per trovare la matrice associata a L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, ci serve di trovare le immagini dei tre vettori della base canonica. Le immagini di e_1 ed e_2 le abbiamo già. Per trovare quella di e_3 scriviamo

$$e_3=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}e_1$$

e quindi

$$L(e_3)=\begin{pmatrix}1\\0\\1/2\end{pmatrix}$$

La matrice associata è quindi

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&0\\1&0&1/2\end{pmatrix}$$

ii) Dire se esiste un'applicazione lineare $T:\mathbb{R}_2[t]\to\mathbb{R}_2[t]$ *tale che* $\ker(T)=Span(1-2t^2,t)$ *e* $Im(T)=Span(2+t^2)$*, e in caso affermativo scrivere* $T(1-2t+3t^2)$*.*

Usando la base dei monomi $\mathcal{C}=\{1,t,t^2\}$ possiamo "rileggere" l'esercizio in $\mathbb{R}^3$. Diventa: dire se esiste un'applicazione lineare $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tale che

$$\ker(T)=\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

e $\mathrm{Im}(T)=\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, e in caso affermativo scrivere $T\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$. Le richieste sono quindi identiche a quelle del punto i), e se ne deduce che un'applicazione esiste ed un esempio è dato dalla matrice A costruita sopra. Quindi si ottiene

$$T\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&0\\1&0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\5/2\end{pmatrix}$$

che riletto come polinomio diventa $T(1-2t+3t^2)=5+\frac{5}{2}t^2$.

Compito 2. *i) Dire se esiste un'applicazione lineare* $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *tale che* $\ker(L)=\{x_1+2x_2=0\}$ *e* $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\in Im(L)$*, e in caso affermativo scrivere la matrice associata a* L *rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$*;*

Il nucleo dell'applicazione ha dimensione 2 e dal Teorema della Dimensione troviamo quindi

$$3 = \dim(\mathrm{Im}(L)) + 2$$

il che implica che

$$\mathrm{Im}(L) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Per scrivere un'applicazione che soddisfi le richieste troviamo innanzitutto una base di $\ker(L)$ e la completiamo a base di $\mathbb{R}^3$. Si trova che

$$\ker(L) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

e una base di $\mathbb{R}^3$ è quindi per esempio

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Dobbiamo quindi imporre

$$L\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove per l'ultimo elemento della base abbiamo scelto come immagine il vettore che deve generare $\mathrm{Im}(L)$.
Per trovare la matrice associata a L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, ci serve di trovare le immagini dei tre vettori della base canonica. Le immagini di e_1 ed e_3 le abbiamo già. Per trovare quella di e_2 scriviamo

$$e_2 = -\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\,e_1$$

e quindi

$$L(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice associata è quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Dire se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ *tale che* $\ker(T) = Span(2 - t, t^2)$ *e* $Im(T) = Span(1 + 2t)$*, e in caso affermativo scrivere* $T(1 - 2t + 3t^2)$*.*

Usando la base dei monomi $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$ possiamo "rileggere" l'esercizio in $\mathbb{R}^3$. Diventa: dire se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\ker(T) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

e $\mathrm{Im}(T) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, e in caso affermativo scrivere $T \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Le richieste sono quindi identiche a quelle del punto i), e se ne deduce che un'applicazione esiste ed un esempio è dato dalla matrice A costruita sopra. Quindi si ottiene

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che riletto come polinomio diventa $T(1 - 2t + 3t^2) = -3 - 6t$.

Compito 3. *i) Dire se esiste un'applicazione lineare* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tale che* $\ker(L) = \{x_1 + 3x_3 = 0\}$ *e* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in$ *Im*(L)*, e in caso affermativo scrivere la matrice associata a* L *rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$*;*

Il nucleo dell'applicazione ha dimensione 2 e dal Teorema della Dimensione troviamo quindi

$$3 = \dim(\mathrm{Im}(L)) + 2$$

il che implica che

$$\mathrm{Im}(L) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Per scrivere un'applicazione che soddisfi le richieste troviamo innanzitutto una base di $\ker(L)$ e la completiamo a base di $\mathbb{R}^3$. Si trova che

$$\ker(L) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

e una base di $\mathbb{R}^3$ è quindi per esempio

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Dobbiamo quindi imporre

$$L \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dove per l'ultimo elemento della base abbiamo scelto come immagine il vettore che deve generare $\mathrm{Im}(L)$.

Per trovare la matrice associata a L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, ci serve di trovare le immagini dei tre vettori della base canonica. Le immagini di e_1 ed e_2 le abbiamo già. Per trovare quella di e_3 scriviamo

$$e_3 = - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\, e_1$$

e quindi

$$L(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

La matrice associata è quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

ii) Dire se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ *tale che* $\ker(T) = Span(3 - t^2, t)$ *e* $Im(T) = Span(1 + 3t^2)$*, e in caso affermativo scrivere* $T(1 - 2t + 3t^2)$*.*

Usando la base dei monomi $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$ possiamo "rileggere" l'esercizio in $\mathbb{R}^3$. Diventa: dire se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\ker(T) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

e $\text{Im}(T) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, e in caso affermativo scrivere $T\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Le richieste sono quindi identiche a quelle del punto i), e se ne deduce che un'applicazione esiste ed un esempio è dato dalla matrice A costruita sopra. Quindi si ottiene

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$$

che riletto come polinomio diventa $T(1 - 2t + 3t^2) = 10 + 30t^2$.

Compito 4. *i) Dire se esiste un'applicazione lineare* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tale che* $\ker(L) = \{3x_1 + x_2 = 0\}$ *e* $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in Im(L)$*, e in caso affermativo scrivere la matrice associata a* L *rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$*;*

Il nucleo dell'applicazione ha dimensione 2 e dal Teorema della Dimensione troviamo quindi

$$3 = \dim(\text{Im}(L)) + 2$$

il che implica che

$$\text{Im}(L) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Per scrivere un'applicazione che soddisfi le richieste troviamo innanzitutto una base di $\ker(L)$ e la completiamo a base di $\mathbb{R}^3$. Si trova che

$$\ker(L) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

e una base di $\mathbb{R}^3$ è quindi per esempio

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Dobbiamo quindi imporre

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove per l'ultimo elemento della base abbiamo scelto come immagine il vettore che deve generare $\mathrm{Im}(L)$.

Per trovare la matrice associata a L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, ci serve di trovare le immagini dei tre vettori della base canonica. Le immagini di e_1 ed e_3 le abbiamo già. Per trovare quella di e_3 scriviamo

$$e_2 = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} e_1$$

e quindi

$$L(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice associata è quindi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Dire se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ *tale che* $\ker(T) = \mathit{Span}(1 - 3t, t^2)$ *e* $\mathit{Im}(T) = \mathit{Span}(3 + t)$*, e in caso affermativo scrivere* $T(1 - 2t + 3t^2)$*.*

Usando la base dei monomi $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$ possiamo "rileggere" l'esercizio in $\mathbb{R}^3$. Diventa: dire se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\ker(T) = \mathrm{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

e $\mathrm{Im}(T) = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, e in caso affermativo scrivere $T \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Le richieste sono quindi identiche a quelle del punto i), e se ne deduce che un'applicazione esiste ed un esempio è dato dalla matrice A costruita sopra. Quindi si ottiene

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che riletto come polinomio diventa $T(1 - 2t + 3t^2) = 1 + \frac{1}{3}t$.

- **<u>Esercizio 3</u>**

Compito 1. *Dati i sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \right\} \quad e \quad W = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

trovare la dimensione e una base di $U + W$ *e* $U \cap W$*.*

Troviamo una base di U risolvendo il sistema. Per farlo partiamo dalla matrice dei coefficienti C e la riduciamo a scala, ottenendo

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sim \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo che

$$U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

e quindi $\dim(U) = 2$.

Verifichiamo poi che $\dim(W) = 3$ e che quindi i vettori che lo generano sono anche una base.

Cerchiamo adesso $\dim(U + W)$ e una sua base. Per farlo scriviamo la matrice che ha come colonne i vettori delle basi di U e W, e la riduciamo a scala. Otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sim \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\dim(U + W) = \text{rg}(A) = \text{rg}(S) = 3$ e una base è data dalle prime tre colonne di A.

Ricordiamo però che $U + W$ è il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene $U \cup W$. Quindi in particolare $W \subset (U + W)$ e $\dim(W) = \dim(U + W)$, da cui si ricava che $W = U + W$, e quindi una base di $U+W$ è anche la base di W data. Inoltre da $W = U+W$ si ottiene anche che $U \subset (U+W) = W$, quindi $U \cap W = U$. Quindi $\dim(U \cap W) = 2$ e una sua base è la base di U trovata sopra.

Alternativamente, si poteva anche scrivere che $\dim(U \cap W) = \dim \ker(A)$ e una base di $U \cap W$ si trova usando la base di $\ker(A)$ per scrivere combinazioni lineari dei vettori di U o W.

Compito 2. *Dati i sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \right\} \quad e \quad W = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

trovare la dimensione e una base di $U + W$ *e* $U \cap W$*.*

Troviamo una base di U risolvendo il sistema. Per farlo partiamo dalla matrice dei coefficienti C e la riduciamo a scala, ottenendo

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sim \quad S = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo che

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

e quindi $\dim(U) = 2$.

Verifichiamo poi che $\dim(W) = 3$ e che quindi i vettori che lo generano sono anche una base.

Cerchiamo adesso $\dim(U + W)$ e una sua base. Per farlo scriviamo la matrice che ha come colonne i vettori delle basi di U e W, e la riduciamo a scala. Otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\dim(U + W) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(S) = 3$ e una base è data dalla prima, seconda e quarta colonna di A.

Ricordiamo però che $U + W$ è il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene $U \cup W$. Quindi in particolare $W \subset (U + W)$ e $\dim(W) = \dim(U + W)$, da cui si ricava che $W = U + W$, e quindi una base di $U+W$ è anche la base di W data. Inoltre da $W = U+W$ si ottiene anche che $U \subset (U+W) = W$, quindi $U \cap W = U$. Quindi $\dim(U \cap W) = 2$ e una sua base è la base di U trovata sopra.

Alternativamente, si poteva anche scrivere che $\dim(U \cap W) = \dim \ker(A)$ e una base di $U \cap W$ si trova usando la base di $\ker(A)$ per scrivere combinazioni lineari dei vettori di U o W.

Compito 3. *Dati i sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \right\} \quad e \quad W = Span\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

trovare la dimensione e una base di $U + W$ *e* $U \cap W$.

Troviamo una base di U risolvendo il sistema. Per farlo partiamo dalla matrice dei coefficienti C e la riduciamo a scala, ottenendo

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim S = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo che

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

e quindi $\dim(U) = 2$.

Verifichiamo poi che $\dim(W) = 3$ e che quindi i vettori che lo generano sono anche una base.

Cerchiamo adesso $\dim(U + W)$ e una sua base. Per farlo scriviamo la matrice che ha come colonne i vettori delle basi di U e W, e la riduciamo a scala. Otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\dim(U+W) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(S) = 3$ e una base è data dalle prime tre colonne di A.

Ricordiamo però che $U+W$ è il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene $U \cup W$. Quindi in particolare $W \subset (U+W)$ e $\dim(W) = \dim(U+W)$, da cui si ricava che $W = U+W$, e quindi una base di $U+W$ è anche la base di W data. Inoltre da $W = U+W$ si ottiene anche che $U \subset (U+W) = W$, quindi $U \cap W = U$. Quindi $\dim(U \cap W) = 2$ e una sua base è la base di U trovata sopra.

Alternativamente, si poteva anche scrivere che $\dim(U \cap W) = \dim \ker(A)$ e una base di $U \cap W$ si trova usando la base di $\ker(A)$ per scrivere combinazioni lineari dei vettori di U o W.

Compito 4. *Dati i sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \; : \; \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \right\} \quad e \quad W = Span\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

trovare la dimensione e una base di $U+W$ *e* $U \cap W$.

Troviamo una base di U risolvendo il sistema. Per farlo partiamo dalla matrice dei coefficienti C, che è già ridotta a scala

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo che

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

e quindi $\dim(U) = 2$.

Verifichiamo poi che $\dim(W) = 3$ e che quindi i vettori che lo generano sono anche una base.

Cerchiamo adesso $\dim(U+W)$ e una sua base. Per farlo scriviamo la matrice che ha come colonne i vettori delle basi di U e W, e la riduciamo a scala. Otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \sim \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\dim(U+W) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(S) = 3$ e una base è data dalle prime tre colonne di A.

Ricordiamo però che $U+W$ è il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene $U \cup W$. Quindi in particolare $W \subset (U+W)$ e $\dim(W) = \dim(U+W)$, da cui si ricava che $W = U+W$, e quindi una base di $U+W$ è anche la base di W data. Inoltre da $W = U+W$ si ottiene anche che $U \subset (U+W) = W$, quindi $U \cap W = U$. Quindi $\dim(U \cap W) = 2$ e una sua base è la base di U trovata sopra.

Alternativamente, si poteva anche scrivere che $\dim(U \cap W) = \dim \ker(A)$ e una base di $U \cap W$ si trova usando la base di $\ker(A)$ per scrivere combinazioni lineari dei vettori di U o W.

- **Esercizio 4**

Compito 1. *Usare il Teorema di Rouché-Capelli per studiare al variare di* $k \in \mathbb{R}$ *il sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_3 = k \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 1 - k \end{cases}$$

e scriverne le soluzioni esplicitamente per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esistono.

Il Teorema di Rouché-Capelli afferma che un sistema lineare è compatibile se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa. Inoltre, se il sistema è compatibile, la dimensione dello spazio delle soluzioni è uguale al numero delle variabili meno il rango della matrice dei coefficienti.

Cominciamo quindi a calcolare il rango delle matrici. La matrice dei coefficienti A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3 visto che

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

La matrice completa A' è la matrice

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & k \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1-k \end{array} \right)$$

che verifica $3 \leq \mathrm{rg}(A') \leq 4$, perché A è una sua sottomatrice. Si trova inoltre $\det(A') = 2k - 4$. Quindi $\mathrm{rg}(A') = 4$ se $k \neq 2$ e $\mathrm{rg}(A') = 3$ se $k = 2$.

Applicando il Teorema di Rouché-Capelli ricaviamo allora che il sistema è compatibile se e solo se $k = 2$, e in questo caso la soluzione sarà un punto. Per trovarla esplicitamente riduciamo a scala la matrice completa ponendo $k = 2$, e troviamo

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad \sim \quad S' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La soluzione è quindi

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Compito 2. *Usare il Teorema di Rouché-Capelli per studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 - k \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 = k \end{cases}$$

e scriverne le soluzioni esplicitamente per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esistono.

Il Teorema di Rouché-Capelli afferma che un sistema lineare è compatibile se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa. Inoltre, se il sistema è compatibile, la dimensione dello spazio delle soluzioni è uguale al numero delle variabili meno il rango della matrice dei coefficienti.

Cominciamo quindi a calcolare il rango delle matrici. La matrice dei coefficienti A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3 visto che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

La matrice completa A' è la matrice

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2-k \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & k \end{array}\right)$$

che verifica $3 \leq \text{rg}(A') \leq 4$, perché A è una sua sottomatrice. Si trova inoltre $\det(A') = 6k+6$. Quindi $\text{rg}(A') = 4$ se $k \neq -1$ e $\text{rg}(A') = 3$ se $k = -1$.

Applicando il Teorema di Rouché-Capelli ricaviamo allora che il sistema è compatibile se e solo se $k = -1$, e in questo caso la soluzione sarà un punto. Per trovarla esplicitamente riduciamo a scala la matrice completa ponendo $k = -1$, e troviamo

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \sim \quad S' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La soluzione è quindi

$$P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Compito 3. *Usare il Teorema di Rouché-Capelli per studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -3 \\ x_2 - x_3 = k \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -3 - k \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

e scriverne le soluzioni esplicitamente per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esistono.

Il Teorema di Rouché-Capelli afferma che un sistema lineare è compatibile se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa. Inoltre, se il sistema è compatibile, la dimensione dello spazio delle soluzioni è uguale al numero delle variabili meno il rango della matrice dei coefficienti.

Cominciamo quindi a calcolare il rango delle matrici. La matrice dei coefficienti A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3 visto che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

La matrice completa A' è la matrice

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 3 & -3-k \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

che verifica $3 \leq \mathrm{rg}(A') \leq 4$, perché A è una sua sottomatrice. Si trova inoltre $\det(A') = -10k + 20$. Quindi $\mathrm{rg}(A') = 4$ se $k \neq 2$ e $\mathrm{rg}(A') = 3$ se $k = 2$.

Applicando il Teorema di Rouché-Capelli ricaviamo allora che il sistema è compatibile se e solo se $k = 2$, e in questo caso la soluzione sarà un punto. Per trovarla esplicitamente riduciamo a scala la matrice completa ponendo $k = 2$, e troviamo

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \quad \sim \quad S' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La soluzione è quindi

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Compito 4. *Usare il Teorema di Rouché-Capelli per studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema*

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 3k \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -4 - k \\ x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$$

e scriverne le soluzioni esplicitamente per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esistono.

Il Teorema di Rouché-Capelli afferma che un sistema lineare è compatibile se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa. Inoltre, se il sistema è compatibile, la dimensione dello spazio delle soluzioni è uguale al numero delle variabili meno il rango della matrice dei coefficienti.

Cominciamo quindi a calcolare il rango delle matrici. La matrice dei coefficienti A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3 visto che
$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$
La matrice completa A' è la matrice
$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3k \\ 1 & 1 & 3 & -4-k \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$
che verifica $3 \leq \text{rg}(A') \leq 4$, perché A è una sua sottomatrice. Si trova inoltre $\det(A') = 36k + 24$. Quindi $\text{rg}(A') = 4$ se $k \neq -\frac{2}{3}$ e $\text{rg}(A') = 3$ se $k = -\frac{2}{3}$.

Applicando il Teorema di Rouché-Capelli ricaviamo allora che il sistema è compatibile se e solo se $k = -\frac{2}{3}$, e in questo caso la soluzione sarà un punto. Per trovarla esplicitamente riduciamo a scala la matrice completa ponendo $k = -\frac{2}{3}$, e troviamo
$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -10/3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \quad \sim \quad S' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -10/3 \\ 0 & -1 & -4 & 16/3 \\ 0 & 0 & 10 & -50/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
La soluzione è quindi
$$P = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$

- **Esercizio 5**

Compito 1. *Dire se esiste, e in caso affermativo trovarla, una base che triangolarizza o diagonalizza la matrice*
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo cercare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Scriviamo il polinomio caratteristico di A
$$p_A(t) = \det(A - tI) = -(t^3 - 7t^2 + 16t - 12) = -(t-2)^2(t-3)$$
Quindi troviamo che gli autovalori sono $\{2, 3\}$ con molteplicità algebriche $m_2 = 2$ e $m_3 = 1$. Cerchiamo le molteplicità geometriche:
$$g_2 = \dim\ker(A - 2I) = \dim\ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$
$$g_3 = \dim\ker(A - 3I) = \dim\ker\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1$$
anche se per l'autovalore 3, poiché $m_3 = 1$, si può subito concludere che $g_3 = m_3 = 1$. Quindi poiché $m_2 + m_3 = 3$ e $g_2 < m_2$, $g_3 = m_3$, si conclude che la matrice A non è diagonalizzabile ma triangolabile.

La base $\mathcal{C}$ che la rende triangolare avrà due vettori relativi all'autovalore 2 e un vettore relativo all'autovalore 3. Quelli relativi all'autovalore 2 si trovano cercando un autovettore v_2 e un vettore w che soddisfi $(A-2I)w = v_2$, mentre il vettore relativo all'autovalore 3 è un autovettore v_3. Si trova che

$$(A-2I)v_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-2I)w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A-3I)v_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Compito 2. *Dire se esiste, e in caso affermativo trovarla, una base che triangolarizza o diagonalizza la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo cercare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Scriviamo il polinomio caratteristico di A

$$p_A(t) = \det(A - tI) = -(t^3 - 7t^2 + 15t - 9) = -(t-3)^2(t-1)$$

Quindi troviamo che gli autovalori sono $\{1, 3\}$ con molteplicità algebriche $m_1 = 1$ e $m_3 = 2$. Cerchiamo le molteplicità geometriche:

$$g_1 = \dim\ker(A - I) = \dim\ker \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$g_3 = \dim\ker(A - 3I) = \dim\ker \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

anche se per l'autovalore 1, poiché $m_1 = 1$, si può subito concludere che $g_1 = m_1 = 1$. Quindi poiché $m_1 + m_3 = 3$ e $g_1 = m_1$, g_3, m_3, si conclude che la matrice A non è diagonalizzabile ma triangolabile.

La base $\mathcal{C}$ che la rende triangolare avrà due vettori relativi all'autovalore 3 e un vettore relativo all'autovalore 1. Quelli relativi all'autovalore 3 si trovano cercando un autovettore v_3 e un vettore w che soddisfi $(A-3I)w = v_3$, mentre il vettore relativo all'autovalore 1 è un autovettore v_1. Si trova che

$$(A-3I)v_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-3I)w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)v_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Compito 3. *Dire se esiste, e in caso affermativo trovarla, una base che triangolarizza o diagonalizza la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo cercare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Scriviamo il polinomio caratteristico di A

$$p_A(t) = \det(A - tI) = -(t^3 - 7t^2 + 16t - 12) = -(t-2)^2(t-3)$$

Quindi troviamo che gli autovalori sono $\{2, 3\}$ con molteplicità algebriche $m_2 = 2$ e $m_3 = 1$. Cerchiamo le molteplicità geometriche:

$$g_2 = \dim\ker(A - 2I) = \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$g_3 = \dim\ker(A - 3I) = \dim\ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

anche se per l'autovalore 3, poiché $m_3 = 1$, si può subito concludere che $g_3 = m_3 = 1$. Quindi poiché $m_2 + m_3 = 3$ e $g_2 < m_2$, $g_3 = m_3$, si conclude che la matrice A non è diagonalizzabile ma triangolabile.

La base $\mathcal{C}$ che la rende triangolare avrà due vettori relativi all'autovalore 2 e un vettore relativo all'autovalore 3. Quelli relativi all'autovalore 2 si trovano cercando un autovettore v_2 e un vettore w che soddisfi $(A - 2I)w = v_2$, mentre il vettore relativo all'autovalore 3 è un autovettore v_3. Si trova che

$$(A-2I)v_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A-2I)w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-3I)v_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Compito 4. *Dire se esiste, e in caso affermativo trovarla, una base che triangolarizza o diagonalizza la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo cercare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Scriviamo il polinomio caratteristico di A

$$p_A(t) = \det(A - tI) = -(t^3 - 7t^2 + 15t - 9) = -(t-3)^2(t-1)$$

Quindi troviamo che gli autovalori sono $\{1, 3\}$ con molteplicità algebriche $m_1 = 1$ e $m_3 = 2$. Cerchiamo le molteplicità geometriche:

$$g_1 = \dim\ker(A - I) = \dim\ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

$$g_3 = \dim\ker(A - 3I) = \dim\ker \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

anche se per l'autovalore 1, poiché $m_1 = 1$, si può subito concludere che $g_1 = m_1 = 1$. Quindi poiché $m_1 + m_3 = 3$ e $g_1 = m_1$, g_3, m_3, si conclude che la matrice A non è diagonalizzabile ma triangolabile.

La base $\mathcal{C}$ che la rende triangolare avrà due vettori relativi all'autovalore 3 e un vettore relativo all'autovalore 1. Quelli relativi all'autovalore 3 si trovano cercando un autovettore v_3 e un vettore w che soddisfi $(A - 3I)w = v_3$, mentre il vettore relativo all'autovalore 1 è un autovettore v_1. Si trova che

$$(A - 3I)v_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - 3I)w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)v_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$