Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 18-02-2015

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = (x^2 - 2y^2)\, e^{x-y}$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ sul triangolo di vertici

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

dove

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\,, x \ge 0\,, y \ge x^2 \right\}.$$

Esercizio 3. (10 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ e parametrizzazione

$$\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(\sin(t)\,,\, \sin(2t)\Big)$$

i) dire se la curva è regolare e fare un disegno approssimativo del sostegno;

ii) calcolare il lavoro lungo la curva (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y+1}{(x+1)^2+y^2} \\ \frac{x+y+1}{(x+1)^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = (x^2 - 2y^2)\, e^{x-y}$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

La funzione è definita e differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque per trovare i punti critici dobbiamo risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} (2x + x^2 - 2y^2)\, e^{x-y} = 0 \\ (-4y - x^2 + 2y^2)\, e^{x-y} = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} 2x + x^2 - 2y^2 = 0 \\ -4y - x^2 + 2y^2 = 0 \end{cases}$$

visto che l'esponenziale non si annulla mai. Sommando le due equazioni si ricava $x = 2y$, e usando questa condizione nella prima equazione troviamo

$$2y^2 + 4y = 0\,.$$

Quindi otteniamo che i punti critici di f sono

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Per caratterizzarli andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f. Osserviamo che f è una funzione anche di classe C^2 su tutto il dominio, dunque la matrice Hessiana sarà simmetrica. In particolare troviamo

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} (x^2 - 2y^2 + 4x + 2)\, e^{x-y} & (-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y)\, e^{x-y} \\ (-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y)\, e^{x-y} & (x^2 - 2y^2 + 8y - 4)\, e^{x-y} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora la matrice Hessiana in C_1:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

e si ha $\det Hf(0,0) = -8 < 0$. Dunque C_1 è un punto di sella.
Calcoliamo ora la matrice Hessiana in C_2:

$$Hf(-4,-2) = \begin{pmatrix} -6\, e^{-2} & 8\, e^{-2} \\ 8\, e^{-2} & -12\, e^{-2} \end{pmatrix},$$

e si ha $\det Hf(-4,-2) = 8\, e^{-2} > 0$ e traccia $Hf(-4,-2) = -18\, e^{-2} < 0$. Dunque C_2 è un punto di massimo locale.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ sul triangolo di vertici

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

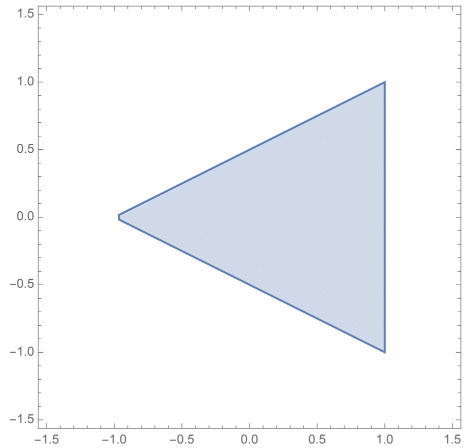

Figure 1:

Il triangolo $\bar{\Omega}$ è rappresentato nella figura 1.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non derivabilità, e i punti critici sono stati trovati al punto i). L'unico interno all'insieme $\bar{\Omega}$ è C_1, che va dunque considerato.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Parametrizziamo ora i tre segmenti del bordo. Troviamo

$$\gamma_1(t) = (1-t)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_2(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_3(t) = (1-t)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ -t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

Componiamo con f e otteniamo le funzioni di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = (2t^2 - 4t + 1)\, e^{t-1}, \qquad t \in [0,1]$$

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = (-8t^2 + 8t - 1)\, e^{2t}, \qquad t \in [0,1]$$

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = (2t^2 - 4t + 1)\, e^{3t-1}, \qquad t \in [0,1]$$

Tutte le funzioni sono sempre derivabili e gli estremi dei loro domini corrispondono agli spigoli. Dunque ci rimane di trovare i punti critici delle tre funzioni.

Per g_1 si trova
$$g_1'(t) = (2t^2 - 3)\, e^{t-1}\,,$$
che si annulla per $t = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, quindi mai nell'intervallo $[0,1]$.
Per g_2 si trova
$$g_2'(t) = -(8t^2 - 3)\, e^{2t}\,,$$
che si annulla per $t = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$. Dunque troviamo un punto critico vincolato
$$V_1 = \gamma_2\Big(\sqrt{\frac{3}{8}}\Big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$
Per g_3 si trova
$$g_3'(t) = (6t^2 - 8t - 1)\, e^{3t-1}\,,$$
che si annulla per $t = \frac{4\pm\sqrt{22}}{6}$, quindi mai nell'intervallo $[0,1]$.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque
$$f(C_1) = 0\,, \quad f(P) = \frac{1}{e}\,, \quad f(Q) = -1\,, \quad f(R) = -e^2\,, \quad f(V_1) = 4\Big(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\Big)\, e^{\sqrt{\frac{3}{2}}}\,.$$
Per cui il minimo di f è $-e^2$, e il massimo è $4\Big(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\Big)\, e^{\sqrt{\frac{3}{2}}}$, osservando per esempio che
$$4\Big(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\Big) > \frac{1}{2} > \frac{1}{e}$$
ed $e^{\sqrt{\frac{3}{2}}} > 1$.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*
$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$
dove
$$\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\,, x \ge 0\,, y \ge x^2\big\}\,.$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2. Risolviamo l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia
$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$
Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo
$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \iint_S 1\; d\rho\, d\theta\,.$$

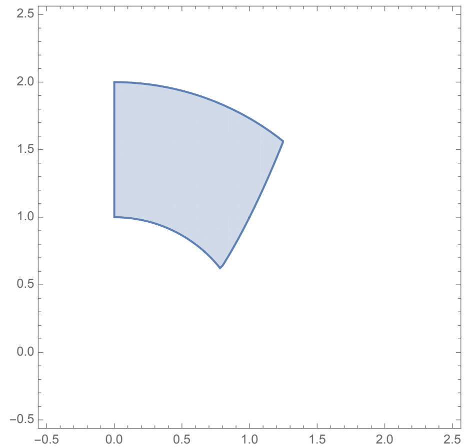

Figure 2: L'insieme Ω.

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \,:\, 1 \leq \rho^2 \leq 4\,,\ \rho\cos\theta \geq 0\,,\ \rho\sin\theta \geq \rho^2\cos^2\theta\right\}$$

Dalle tre condizioni ricaviamo innanzitutto che

$$1 \leq \rho \leq 2 \quad \text{e} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

e in quest'insieme va studiata la terza condizione che si riscrive come

$$\rho \leq \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,.$$

L'insieme S è rappresentato in figura 3. Dunque si scrive come insieme semplice rispetto a ρ come

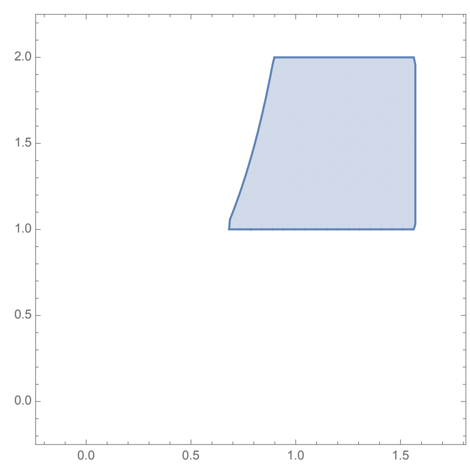

Figure 3: L'insieme S con θ sulle ascisse e ρ sulle ordinate.

unione di due insiemi, $S = S_1 \cup S_2$ con

$$S_1 = \left\{ (\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \, : \, \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \, , \, 1 \le \rho \le \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ (\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \, : \, \theta_2 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \, , \, 1 \le \rho \le 2 \right\}$$

dove i valori θ_1 e θ_2 sono valori in $[0, \frac{\pi}{2}]$ che risolvono

$$\frac{\sin\theta_1}{\cos^2\theta_1} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2} = 2 \, .$$

Quindi otteniamo

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx \, dy = \iint_S 1 \, d\rho \, d\theta = \iint_{S_1} 1 \, d\rho \, d\theta + \iint_{S_2} 1 \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\int_1^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} 1 \, d\rho \right) d\theta + \int_{\theta_2}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 1 \, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - 1 \right) d\theta + \int_{\theta_2}^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\theta =$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \theta \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} + \frac{\pi}{2} - \theta_2 = \frac{1}{\cos\theta_2} - \frac{1}{\cos\theta_1} + \frac{\pi}{2} + \theta_1 - 2\theta_2 \, .$$

Infine dalle condizioni su θ_1 e θ_2 possiamo ricavare

$$\theta_1 = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad \text{e} \qquad \cos\theta_1 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_2 = \arcsin \frac{\sqrt{17}-1}{4} \qquad \text{e} \qquad \cos\theta_2 = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{8} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e sostituire nel risultato.

Esercizio 3. *Data la curva (γ, I), con $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2 \, , \qquad \gamma(t) = \Big(\sin(t) \, , \, \sin(2t) \Big)$$

i) dire se la curva è regolare e fare un disegno approssimativo del sostegno;

Il sostegno della curva è rappresentato nella figura 4. Per studiarne la regolarità, bisogna determinare se ci sono punti interni all'intervallo I in cui si annulla il vettore velocità

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix} \, ,$$

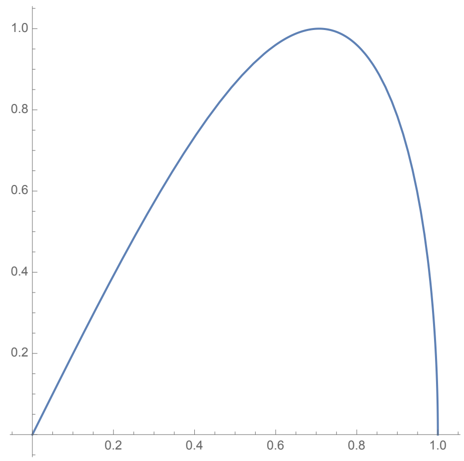

Figure 4: Il sostegno della curva (γ, I).

Ma il sistema

$$\begin{cases} \cos(t) = 0 \\ 2\,\cos(2t) = 0 \end{cases}$$

non ha soluzione in $(0, \frac{\pi}{2})$, quindi la curva è regolare.

ii) calcolare il lavoro lungo la curva (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y+1}{(x+1)^2+y^2} \\ \frac{x+y+1}{(x+1)^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\}$ e poiché

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{-(x+1)^2 - y^2 - 2y\,(x-y+1)}{((x+1)^2+y^2)^2} = \frac{y^2-(x+1)^2-2y(x+1)}{((x+1)^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{(x+1)^2+y^2-2(x+1)(x+y+1)}{((x+1)^2+y^2)^2} = \frac{y^2-(x+1)^2-2(x+1)y}{((x+1)^2+y^2)^2}$$

si trova

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale.

Il dominio del campo non è un dominio semplicemente connesso, essendoci il "buco" in $(-1,0)$, dunque non possiamo concludere che il campo sia conservativo. Anzi, il calcolo del lavoro del campo lungo la circonferenza di centro $(-1,0)$ e raggio 1 ci permetterebbe di concludere che il campo non è conservativo.

Possiamo però procedere come se il campo fosse conservativo perché il sostegno della curva è tutto contenuto nell'insieme $\Omega = \left\{x > -\frac{1}{2}\right\}$, e possiamo quindi restringere il campo $\mathbf{F}$ a Ω, che è un insieme semplicemente connesso. Dunque $\mathbf{F}$ ristretto a Ω è conservativo. Per calcolare il lavoro possiamo quindi cercare un potenziale del campo, si trova che un potenziale definito su Ω è

$$f(x,y) = \frac{1}{2} \log\Big((x+1)^2 + y^2\Big) + \arctan\frac{y}{x+1}\,,$$

oppure, per le proprietà dei campi conservativi, possiamo calcolare il lavoro lungo una curva $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$ che abbia gli stessi punti iniziali e finali di (γ, I), rispettivamente $(0,0)$ e $(1,0)$. Scegliamo per esempio la curva

$$\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \tilde{\gamma}(t) = \Big(t\,,\, 0\Big)$$

per cui

$$\tilde{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

e troviamo

$$L(\mathbf{F},\gamma) = L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}) = \int_0^1 \Big(F_1(t,0)\cdot 1 + F_2(t,0)\cdot 0\Big)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,dt = \log 2\,.$$