Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Prova intermedia del 17-11-2023

Esercizio 1. (15 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - \sin x + \mu\, y^5 \\ \dot{y} = -4\mu\, x - y^3 \end{cases}$$

con $\mu \in \mathbb{R}$.

(a) Studiare la stabilità del punto fisso $(0,0)$.

(b) Nel caso $\mu = 0$, trovare un integrale primo nell'insieme $A := \{x > 0, y > 0\}$.

Esercizio 2. (15 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x\,(x-\mu)\,(x+1) \end{cases}$$

con $\mu \in [0, +\infty)$.

(a) Disegnare il ritratto di fase del sistema nel caso $\mu = 1$. Come varia il ritratto per $\mu \in (0, +\infty)$?

(b) Disegnare il ritratto di fase del sistema nel caso $\mu = 0$.

(c) Si definisca

$$\bar{x}_{(1,0)}(\mu) := \min_{t \in \mathbb{R}} \Big(\phi_t((1,0);\mu)\Big)_x,$$

il minimo valore della componente x dell'orbita di $(1,0)$ per il sistema con parametro μ. Cosa possiamo dire sul grafico della funzione $[0, +\infty) \ni \mu \mapsto \bar{x}_{(1,0)}(\mu)$?

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - \sin x + \mu y^5 \\ \dot{y} = -4\mu x - y^3 \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

(a) Per studiare la stabilità di $P=(0,0)$ innanzitutto calcoliamo

$$JF(0,0) = \begin{pmatrix} -3x^2 - \cos x & 5\mu y^4 \\ -4\mu & -3y^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{x=y=0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4\mu & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det JF(0,0) = 0 \ \forall \mu \in \mathbb{R}$, P è un punto fisso non iperbolico $\forall \mu \in \mathbb{R}$, quindi non possiamo applicare il Teorema di Hartman-Grobman.

Si consideri una funzione $V(x,y) = A x^{2n} + B y^{2m}$ con $A, B > 0$, $n, m \in \mathbb{N}$, e verifichiamo se per qualche scelta delle costanti è una funzione di Lyapunov.

Si ha $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$, e $V(x,y) > V(0,0) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Calcoliamo

$$\dot{V}(x,y) = 2nA\, x^{2n-1}\left(-x^3 - \sin x + \mu y^5\right) + 2mB\, y^{2m-1}\left(-4\mu x - y^3\right) =$$

$$= -2nA\, x^{2n+2} - 2mB\, y^{2m+2} - 2nA\, x^{2n-1} \sin x + 2nA\mu\, x^{2n-1} y^5 - 8mB\mu\, x y^{2m-1}.$$

Volendo far elidere i termini misti poniamo

$$2nA\mu = 8mB\mu, \quad 2n-1 = 1, \quad 5 = 2m-1$$

che ha una possibile soluzione $n=1$, $m=3$, $A=12$, $B=1$. Quindi la funzione $\boxed{V(x,y) = 12x^2 + y^6}$ verifica

$$\dot{V}(x,y) = -24x^4 - 6y^8 - 24\, x \sin x$$

Poiché $x \sin x \geq 0 \quad \forall x \in (-\pi, \pi)$ e in quest'intervallo si annulla solo in $x=0$, vale

$$\dot{V}(x,y) < 0 \qquad \forall (x,y) \in U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -\pi < x < \pi\} \setminus \{(0,0)\}.$$

Dunque V è una funzione stretta di Lyapunov per $P=(0,0)$ su U $\forall \mu \in \mathbb{R}$. Ne segue che $P=(0,0)$ è asintoticamente stabile $\forall \mu \in \mathbb{R}$.

(b) Per $\mu = 0$ il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - \sin x \\ \dot{y} = -y^3 \end{cases}$$

Si osserva che $\{x=0\}$ e $\{y=0\}$ sono insiemi invarianti, quindi è invariante anche l'insieme $A=\{x>0,\ y>0\}$. Inoltre su A non ci sono punti fissi e $x^3+\sin x>0,\ y^3>0 \quad \forall (x,y)\in A$.

Possiamo cercare le isocline del sistema in A. Ponendo per $(x_0,y_0)\in A$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^3}{x^3+\sin x}\ , \quad y(x_0)=y_0$$

si ha

$$\int_{y_0}^{y(x)}\frac{dy}{y^3}=\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{t^3+\sin t} \iff -\frac{1}{2\,y(x)^2}+\frac{1}{2\,y_0^2}=\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{t^3+\sin t}$$

$$\iff \frac{1}{2\,y(x)^2}+\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{t^3+\sin t}=\frac{1}{2\,y_0^2}$$

che si può scrivere nella forma

$$I(x,y(x))=\frac{1}{2\,y(x)^2}+\int_1^x\frac{dt}{t^3+\sin t}=\frac{1}{2y_0^2}-\int_{x_0}^{1}\frac{dt}{t^3+\sin t}=\text{cost}(x_0,y_0)$$

Ponendo

$$I(x,y)=\frac{1}{2y^2}+\int_1^x\frac{dt}{t^3+\sin t}$$

troviamo quindi un integrale primo su A. Infatti si può verificare che

$$\dot I(x,y)=-\frac{1}{y^3}\,\dot y+\frac{1}{x^3+\sin x}\,\dot x=0 \quad \forall (x,y)\in A.$$

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases}\dot x=y\\ \dot y=-x(x-\mu)(x+1)\end{cases}, \quad \mu\geq 0$$

Il sistema è hamiltoniano di tipo meccanico ad un grado di libertà, quindi della forma $\dot x=y\ ,\ \dot y=-V_\mu'(x)\ ,$ con $H_\mu(x,y)=\frac12 y^2+V_\mu(x)$.

Si ha $V_\mu'(x)=x(x-\mu)(x+1)=x^3+(1-\mu)x^2-\mu x$ e quindi si può scegliere

$$H_\mu(x,y)=\frac12 y^2+\frac14 x^4+\frac13(1-\mu)x^3-\frac12\mu x^2$$

Il ritratto di fase segue dal grafico dell'energia potenziale

$$V_\mu(x) = x^2\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}(1-\mu)x - \frac{1}{2}\mu\right)$$

Caso $\mu>0$. In questo caso $V_\mu(x)$ ha tre distinti punti critici $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=\mu$.

Poiché $V_\mu''(x) = 3x^2 + 2(1-\mu)x - \mu$, si ha

$$V_\mu''(-1) = 3-2+2\mu-\mu = 1+\mu>0 \implies x_1=-1 \text{ è punto di minimo locale}$$

$$V_\mu''(0) = -\mu<0 \implies x_2=0 \text{ è punto di massimo locale}$$

$$V_\mu''(\mu) = 3\mu^2+2\mu-2\mu^2-\mu = \mu^2+\mu>0 \implies x_3=\mu \text{ è punto di minimo locale}$$

Inoltre
$$V_\mu(-1) = \frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\mu-\frac{1}{2}\mu = -\frac{1}{12}-\frac{1}{6}\mu<0 \quad \forall\mu>0$$

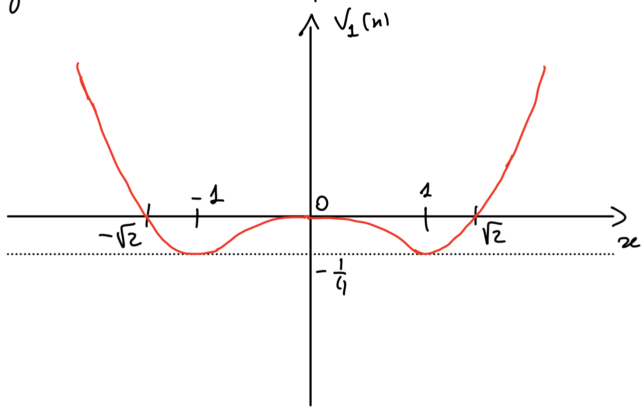
$$V_\mu(0)=0, \quad \forall\mu>0$$

$$V_\mu(\mu) = \mu^2\left(\frac{1}{4}\mu^2-\frac{1}{3}\mu^2+\frac{1}{3}\mu-\frac{1}{2}\mu\right) = \mu^3\left(-\frac{1}{12}\mu-\frac{1}{6}\right)<0 \quad \forall\mu>0$$

e si può mostrare che

$$V_\mu(-1)<V_\mu(\mu) \ \ \forall\mu\in(0,1), \quad V_1(-1)=V_1(\mu) \text{ per } \mu=1, \quad V_\mu(-1)>V_\mu(\mu) \ \ \forall\mu>1$$

(a) Se $\mu=1$, il grafico di $V_1(x)$ è quindi



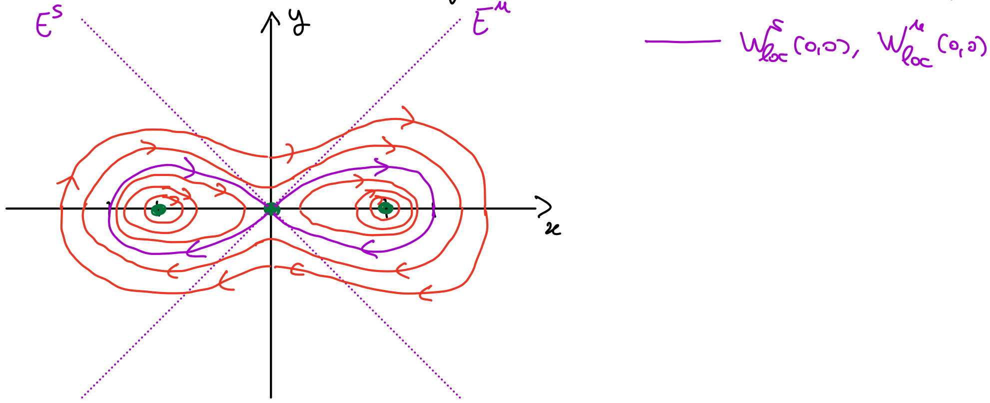
Segue che il sistema ha tre punti fissi:

$P_2=(0,0)$ che è un punto di sella con $E^u = \text{Span}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $E^s=\text{Span}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$;

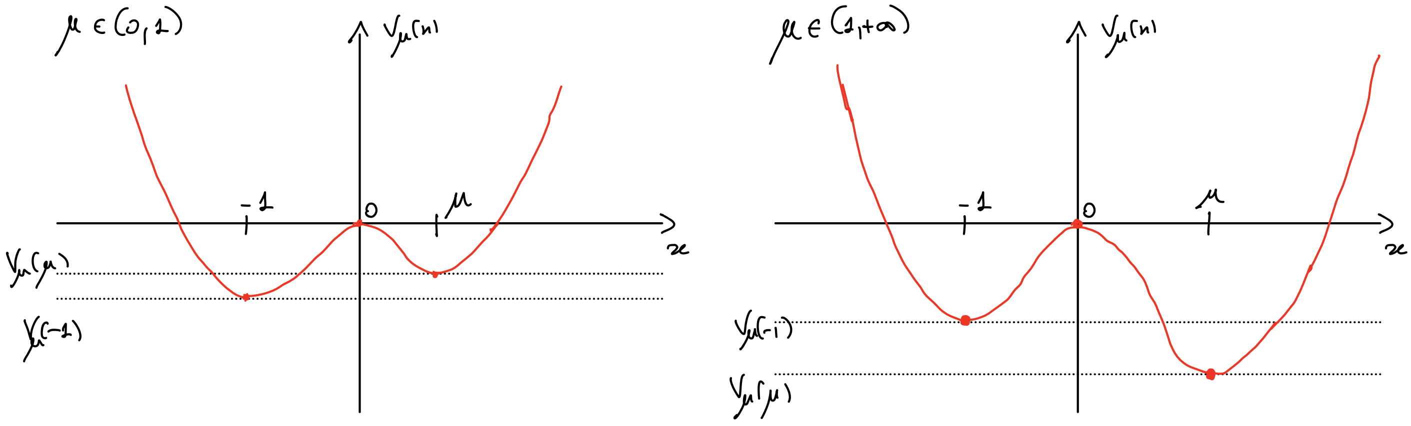
$P_1=(-1,0)$ e $P_3=(1,0)$ che sono punti di tipo centro.

Inoltre $H_1(P_1)=H_1(P_3)<H_1(P_2)$ e $H_1(x,y)=H_1(-x,y)$ $\forall y\in\mathbb{R}$.

Dunque il ritratto di fase sarà simmetrico rispetto all'asse x ma anche rispetto all'asse y.



Per gli altri valori $\mu \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$, abbiamo $V(-1) \neq V(\mu)$ e si perde la simmetria rispetto all'asse y. Il grafico di $V_\mu(x)$ è di questo tipo



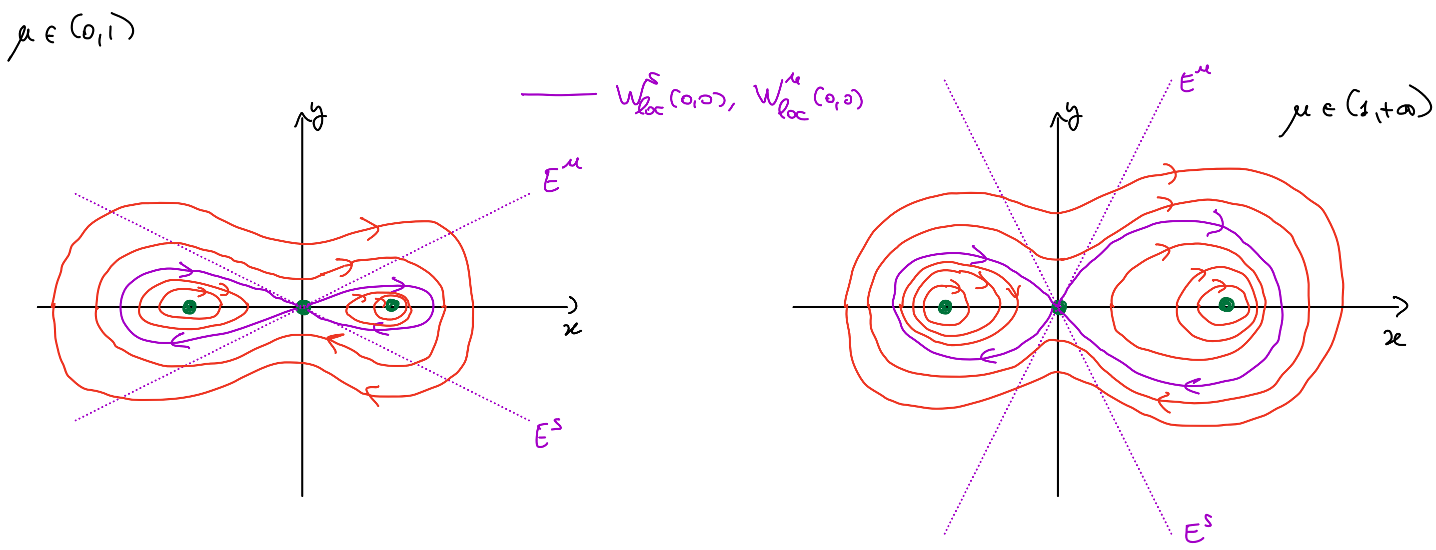
Segue che il sistema ha tre punti fissi:

$P_2 = (0,0)$ che è un punto di sella con $E^u = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{\mu}\end{pmatrix}$, $E^s = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{\mu}\end{pmatrix}$;

$P_1 = (-1,0)$ e $P_3 = (\mu,0)$ che sono punti di tipo centro.

Inoltre

$$H_\mu(P_1) < H_\mu(P_3) < H_\mu(P_2) \text{ se } \mu \in (0,1) \quad \text{e} \quad H_\mu(P_3) < H_\mu(P_1) < H_\mu(P_2) \text{ se } \mu \in (1,+\infty)$$

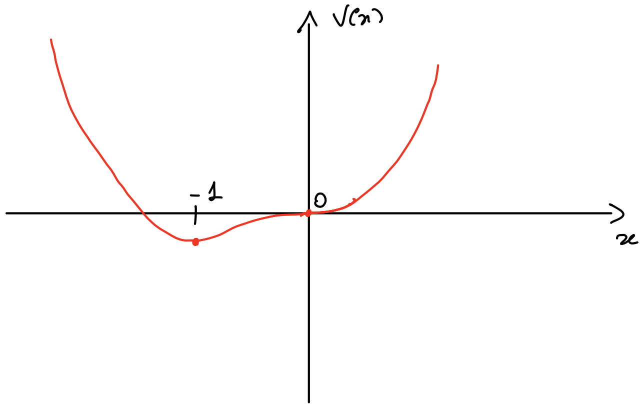


(b) Nel caso $\mu = 0$, $V(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 = x^3\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}\right)$ ha due punti critici $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, e $V''(x) = 3x^2 + 2x$ quindi

$V''(-1) = 3 - 2 = 1 > 0 \Rightarrow x_1$ è un punto di minimo locale

$V''(0) = 0$, $V'''(0) = 2 > 0 \Rightarrow x_2$ è un punto di flesso

Inoltre $V(0) = 0 > V(-1) = -\frac{1}{12}$. Il grafico di $V(x)$ è dunque



Segue che il sistema ha due punti fissi:

$P_1 = (-1,0)$ che è un punto di tipo centro,

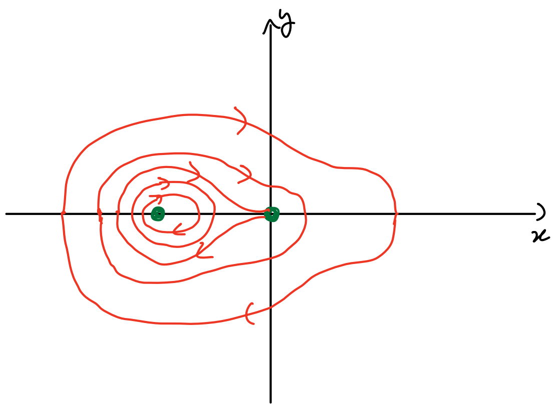
$P_2 = (0,0)$ che è degenere in quanto $\det JF(0,0) = 0$.

Usando l'invarianza di $H(x,y) = \frac{1}{2} y^2 + x^3\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}\right)$, l'insieme di livello di P_2 è invariante ed è descritto dall'equazione

$$H(x,y) = H(0,0) = 0 \iff y^2 = -2x^3\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}\right)$$

da cui $x \in [-4/3, 0]$ e in $(0,0)$ l'insieme è tangente all'asse x.

Il ritratto di fase è dunque



(c) Sia $\bar{x}_{(1,0)}(\mu) := \min_{t\in\mathbb{R}} \left(\phi_t((1,0);\mu)\right)_x$, i grafici di $V_\mu(x)$ e i ritratti di fase aiutano a capire alcune proprietà della funzione $(+\infty,0] \ni \mu \longmapsto \bar{x}_{(1,0)}(\mu)$.

Osserviamo innanzitutto che $\mathcal{O}_\mu(1,0)$ è sempre un insieme limitato, dunque $\bar{x}_{(1,0)}(\mu)$ è limitato dal basso. Inoltre risulta ben definito se $\mathcal{O}_\mu(1,0)$ è anche chiusa.

Iniziamo con $\bar{x}_{(1,0)}(0)$. In questo caso $(1,0)$ è un punto periodico e $\bar{x}_{(1,0)}(0)$ è l'unica soluzione reale di $V(x) = V(1) \iff \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 = \frac{7}{12}$ diversa da 1.

Si deduce dal ritratto di fase che $\bar{x}_{(1,0)}(0) < -1$.

Consideriamo ora $\mu \in (0,1)$. Ci sono tre possibilità: $V_\mu(1) > 0$, $V_\mu(1)=0$, $V_\mu(1)<0$.

Nel primo caso, $V_\mu(1)>0$, l'orbita di $(1,0)$ è periodica e $\overline{x}_{(1,0)}(\mu) < -1$, infatti rimane esterna alle due orbite omocline di $(0,0)$. Se $V_\mu(1) = 0 = V_\mu(0)$, allora $(1,0)$ è sull'orbita omoclina di $(0,0)$ e $\inf_t \phi_t((1,0),\mu)_x = 0$ ma non è un minimo, quindi $\overline{x}_{(1,0)}(\mu)$ in questo caso non è definita. Si ottiene che

$$V_\mu(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\mu - \frac{1}{2}\mu = \frac{7}{12} - \frac{5}{6}\mu = 0 \iff \mu = \frac{7}{10}$$

Inoltre otteniamo che $\lim_{\mu \to \frac{7}{10}^-} \overline{x}_{(1,0)}(\mu) = -\frac{7}{5}$, in quanto $-\frac{7}{5}$ è l'estremo dell'altra orbita omoclina.

Infine se $V_\mu(1)<0$, allora l'orbita di $(1,0)$ è interna all'orbita omoclina di $(0,0)$ quindi è periodica se $\mu \neq 1$, e si ha $\overline{x}_{(1,0)}(\mu) > 0$ e $\lim_{\mu \to \frac{7}{10}^+} \overline{x}_{(1,0)}(\mu) = 0$. Se $\mu = 1$, invece $(1,0)$ è fisso e $\overline{x}_{(1,0)}(1) = 1$. Se poi $\mu > 1$, allora $(1,0)$ è l'estremo sinistro di $\mathcal{O}(1,0)$ e quindi $\overline{x}_{(1,0)}(\mu) = 1$.

In conclusione