**Sistemi Dinamici**
**Corso di Laurea in Matematica**
**Test del 16-09-2021**

Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu y + x^2 + y^2 \\ \dot{y} = -\mu x + x^2 + y^2 \end{cases}$$

al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu y + x^2+y^2 \\ \dot{y} = -\mu x + x^2+y^2 \end{cases} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

## (I) CASO $\mu \neq 0$

<u>Punti fissi</u> $\begin{cases} \mu y - x^2 - y^2 = 0 \\ \mu x - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu y - \mu x = 0 \\ \mu x - x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ \mu x - 2x^2 = 0 \end{cases} \iff (x,y) \in \{ \underset{P_1}{(0,0)}, \underset{P_2}{(\tfrac{\mu}{2}, \tfrac{\mu}{2})} \}$$

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y-\mu \\ 2x-\mu & 2y \end{pmatrix} \qquad \text{quindi}$$

$$JF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} \qquad \det JF(0,0) = -\mu^2 < 0 \quad \forall \mu \neq 0$$

$P_1$ è punto di sella

Autovalori $= \{ \mu, -\mu \}$, Autovettori $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$JF(\tfrac{\mu}{2}, \tfrac{\mu}{2}) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$P_2$ è una stella, stabile se $\mu < 0$, instabile se $\mu > 0$

<u>Simmetrie</u> Se $(x(t), y(t))$ è soluzione del sistema, allora anche $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (y(t), x(t))$ è soluzione. Infatti

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{y}(t) = -\mu x(t) + x^2(t) + y^2(t) = -\mu \tilde{y}(t) + \tilde{y}^2(t) + \tilde{x}^2(t)$$

$$\dot{\tilde{y}}(t) = \dot{x}(t) = -\mu\, y(t) + x^2(t) + y^2(t) = -\mu\, \tilde{x}(t) + \tilde{y}^2(t) + \tilde{x}^2(t)$$

<u>Insiemi invarianti</u>

Poniamo $I(x,y) = ax + by$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\dot{I}(x,y) = a\dot{x} + b\dot{y} = -\mu a y + a(x^2+y^2) - \mu b x + b(x^2+y^2)$$

Se $b=0$, $\dot{I}(x,y)\Big|_{\{I=c\}} = -\mu a y + a(x^2+y^2)\Big|_{\{x=\frac{c}{a}\}} = -\mu a y + a\frac{c^2}{a^2} + a y^2 \not\equiv 0$ impossibile $\forall c$

Se $b \neq 0$, $\dot{I}(x,y)\Big|_{\{I=c\}} = -\mu a y + a(x^2+y^2) - \mu b x + b(x^2+y^2)\Big|_{y=\frac{c-ax}{b}} =$

$$= -\mu \frac{a}{b}(c-ax) + a\left(x^2 + \frac{(c-ax)^2}{b^2}\right) - \mu b x + b\left(x^2 + \frac{(c-ax)^2}{b^2}\right) =$$

$$= a x^2 + \frac{a^3}{b^2}x^2 + b x^2 + \frac{a^2}{b}x^2 + O(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right) + b\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right) = 0 \iff a = -b$$

Quindi poniamo $I(x,y) = b(-x+y)$ da cui

$$\dot{I}(x,y)\Big|_{\{I=c\}} = +\mu b y - b(x^2+y^2) - \mu b x + b(x^2+y^2)\Big|_{y=\frac{c}{b}+x} =$$

$$= \mu c - b\left(x^2 + \left(\frac{c}{b}+x\right)^2\right) + b\left(x^2+\left(\frac{c}{b}+x\right)^2\right) = \mu c \equiv 0 \iff c = 0$$

Quindi l'unica retta invariante è $\{x=y\}$.

<u>Orbite periodiche</u> Non esistono per la presenza della retta invariante. (vedere il ritratto di fase)

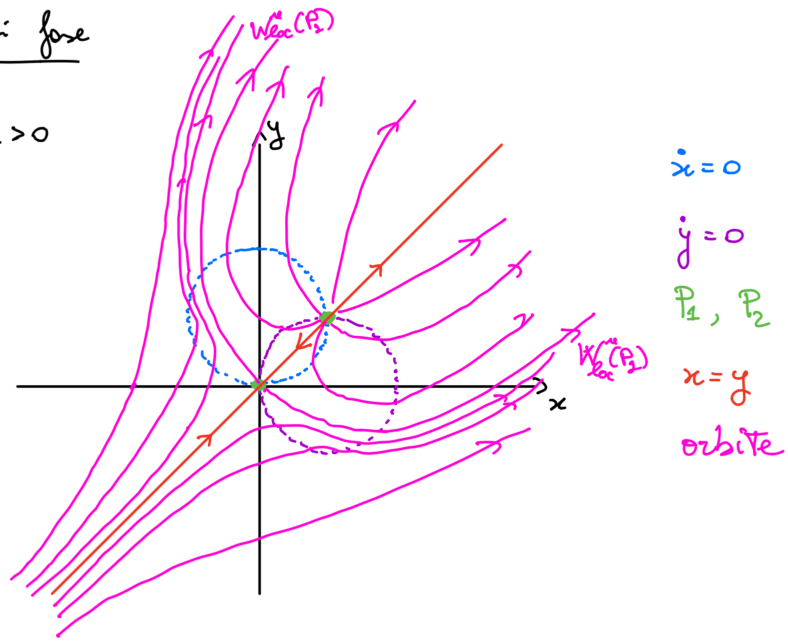
Segno del campo

$$\dot{x} > 0 \iff -\mu y + x^2 + y^2 > 0 \iff x^2 + \left(y - \frac{\mu}{2}\right)^2 > \frac{\mu^2}{4}$$

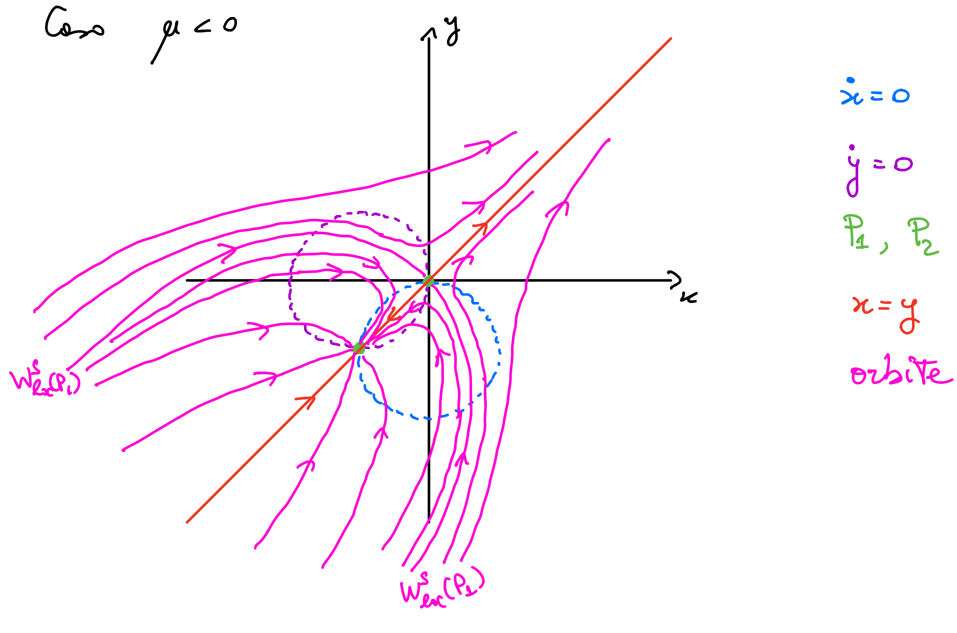
$$\dot{y} > 0 \iff -\mu x + x^2 + y^2 > 0 \iff \left(x - \frac{\mu}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{\mu^2}{4}$$

Ritratto di fase

Caso $\mu > 0$




Caso $\mu < 0$

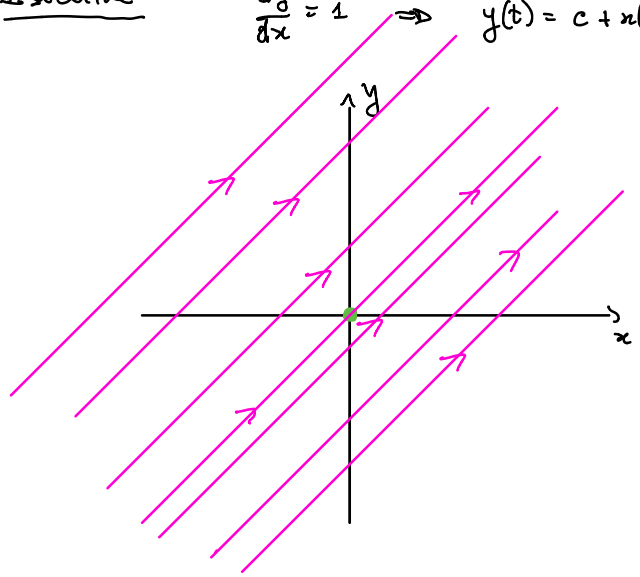


## II CASO $\mu = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 \\ \dot{y} = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Punti fissi $= \{(0,0)\}$

Isocline $\quad \dfrac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow y(t) = c + x(t)$




(0,0)

orbite