Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 16-01-2019

Esercizio 1. (12 punti) (i) Studiare al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$, il ritratto di fase del sistema meccanico dato da un punto materiale di massa $m = 1$ che si muove sulla retta $\mathbb{R}$ soggetto a una forza conservativa con energia potenziale

$$V_\mu(x) = x^2 - x^4 + \mu x^6$$

(ii) Studiare in particolare nei dettagli l'intervallo $\mu \in (\frac{1}{4} - \varepsilon, \frac{1}{4} + \varepsilon)$.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2y^2 \\ \dot{y} = 4y^3 - \sin x \end{cases}$$

(i) trovare i punti critici del sistema e studiare la linearizzazione del campo nei punti trovati;

(ii) mostrare che il punto $(0,0)$ non è un centro per il sistema;

(iii) disegnare un possibile ritratto di fase per il sistema.

(bonus) Mostrare che il punto $(0,0)$ *è instabile, studiando il comportamento dell'area di* $\phi_t(B_\varepsilon(0,0))$, $t > 0$, *per* ε *sufficientemente piccolo.*

Esercizio 3. (11 punti) Data la funzione $f_a : [0,1] \to [0,1]$ definita da

$$f_a(x) = \begin{cases} 2x\,, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ a(1-x)\,, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

con $a \in (0,1]$,

(i) disegnare il grafico di $f_a^2(x)$;

(ii) studiare esistenza e stabilità di orbite periodiche di periodo minimo 2 al variare di $a \in (0,1)$;

(iii) nel caso $a = 1$, disegnare l'f-grafo relativo alla partizione $J_1 = [0, \frac{1}{2}]$, $J_2 = [\frac{1}{2}, 1]$, e studiare esistenza e stabilità di orbite periodiche di periodo minimo $n \geq 2$.

Svolgimento

Esercizio 1. *(i) Studiare al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$, il ritratto di fase del sistema meccanico dato da un punto materiale di massa $m = 1$ che si muove sulla retta $\mathbb{R}$ soggetto a una forza conservativa con energia potenziale*

$$V_\mu(x) = x^2 - x^4 + \mu x^6$$

Distinguiamo innanzitutto tra i casi $\mu > 0$ e $\mu \le 0$, per i quali cambia il comportamento di $V_\mu(x)$ per $x \to \pm\infty$. Inoltre nel piano $(x, \dot{x})$ i punti fissi sono della forma $(\bar{x}, 0)$, dove $\bar{x}$ sono punti critici di V_μ, quindi gli zeri di

$$V'_\mu(x) = 2x(1 - 2x^2 + 3\mu x^4)$$

$\underline{\mu \le 0.}$ In questo caso V_μ ha 3 punti critici

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x_\pm(\mu) = \begin{cases} \pm\sqrt{\frac{\sqrt{1+3|\mu|}-1}{3|\mu|}}\,, & \text{per } \mu < 0 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,, & \text{per } \mu = 0 \end{cases}$$

e $V_\mu(x) \to -\infty$ per $x \to \pm\infty$. In particolare $x = 0$ è un punto di minimo locale in quanto $V''_\mu(0) = 2$, e $x_\pm(\mu)$ sono punti di massimo locale, come si ottiene ad esempio studiando il segno di V'_μ, che si scrive come

$$V'_\mu(x) = \begin{cases} 6\mu x \left(x^2 + \frac{1+\sqrt{1+3|\mu|}}{3|\mu|}\right)\left(x^2 - \frac{\sqrt{1+3|\mu|}-1}{3|\mu|}\right)\,, & \text{per } \mu < 0 \\ -4x\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\,, & \text{per } \mu = 0 \end{cases}$$

Dunque per ogni $\mu \le 0$, V_μ ha grafico come in figura 1a, e il sistema ha ritratto di fase come in figura 1b.

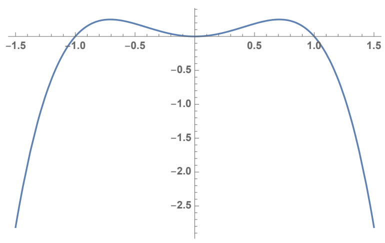
$\underline{\mu > 0.}$ In questo caso il numero di punti critici di V_μ cambia, e dunque ci sono biforcazioni locali. In particolare, i punti critici di V_μ sono:

$$\mu \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad x = 0\,, \quad x^p_\pm(\mu) = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-3\mu}}{3\mu}}\,, \quad \text{e} \quad x^m_\pm(\mu) = \pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-3\mu}}{3\mu}}$$

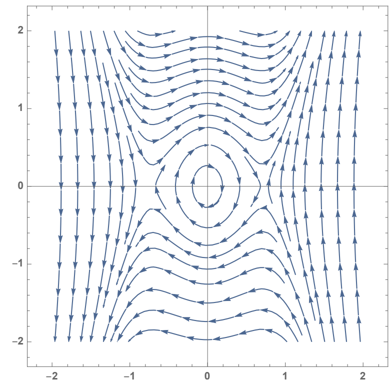
$$\mu = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 0\,, \quad \text{e} \quad x_\pm = \pm 1$$

$$\mu > \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Dunque per ogni $\mu \in (0, \frac{1}{3})$, $x = 0$ è ancora un punto di minimo locale, e V'_μ si scompone dunque nel prodotto di 5 termini di grado 1. Inoltre $V_\mu \to +\infty$ per $x \to \pm\infty$. Ne segue che V_μ ha grafico come in figura 6a, e il sistema ha ritratto di fase come in figura 6b. Per il momento trascuriamo il valore che V_μ assume nei punti di minimo locale.
Per $\mu = \frac{1}{3}$, $x = 0$ è ancora un punto di minimo locale, e $V'_{\frac{1}{3}}(x) = 2x(x^2-1)^2$. Quindi il segno della



(a) Il grafico di V_μ per $\mu = 0$.



(b) Ritratto di fase per $\mu = 0$.

Figure 1

derivata di $V_{\frac{1}{3}}$ dipende solo dal segno di x, e quindi $V_{\frac{1}{3}}$ ha grafico come in figura 6c, e il sistema ha ritratto di fase come in figura 6d. Osserviamo che ci sono 3 punti fissi, anche se non ben visibile in figura.
Infine, per ogni $\mu > \frac{1}{3}$, l'unico punto critico è $x = 0$, che è ancora un minimo locale, e ragionando come sopra si ottiene che V_μ ha grafico come in figura 6e, e il sistema ha ritratto di fase come in figura 6f.

(ii) Studiare in particolare nei dettagli l'intervallo $\mu \in (\frac{1}{4} - \varepsilon, \frac{1}{4} + \varepsilon)$.

Come visto prima, per $\mu = \frac{1}{4}$ i punti critici di $V_{\frac{1}{4}}$ sono 5, in particolare

$$x = 0\,, \quad x^p_\pm = \pm\sqrt{2}\,, \quad \text{e} \quad x^m_\pm = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

e vale $V_{\frac{1}{4}}(0) = V_{\frac{1}{4}}(x^p_\pm) = 0$. Dunque i minimi locali di $V_{\frac{1}{4}}$ sono tutti minimi assoluti allo stesso livello. Inoltre per un $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, si ha che per $\mu \in (\frac{1}{4} - \varepsilon, \frac{1}{4})$ si ha $V_\mu(x^p_\pm) < V_\mu(0)$, mentre per $\mu \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \varepsilon)$ si ha $V_\mu(x^p_\pm) > V_\mu(0)$.

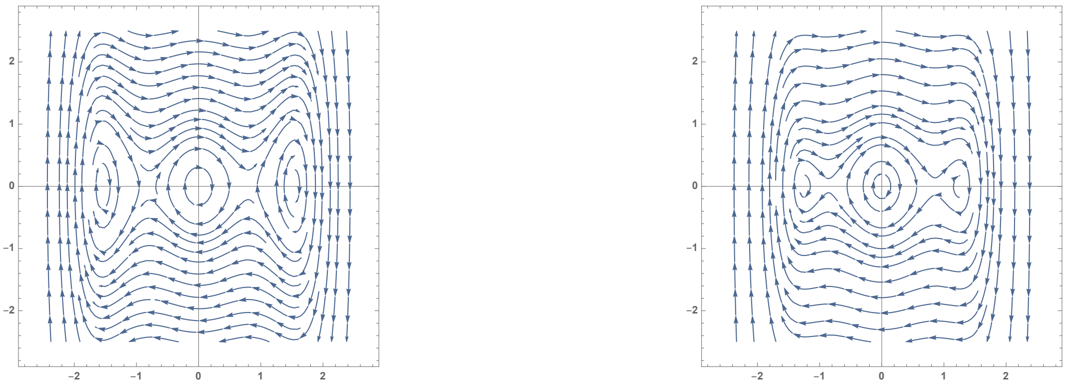
Quello che cambia passando da $\mu \in (\frac{1}{4} - \varepsilon, \frac{1}{4})$ a $\mu(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \varepsilon)$ è quindi l'ampiezza relativa delle oscillazioni intorno ai minimi locali. Si vedano le figure 2a e 2b.

Esercizio 2. *Si consideri il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2y^2 \\ \dot{y} = 4y^3 - \sin x \end{cases}$$

(i) trovare i punti critici del sistema e studiare la linearizzazione del campo nei punti trovati;

Il sistema è periodico di periodo 2π nella variabile x, dunque studiamolo per $x \in (-\pi, \pi]$, e poi tutto si ripete per periodicità.



(a) Ritratto di fase per $\mu \in (\frac{1}{4} - \varepsilon, \frac{1}{4})$.

(b) Ritratto di fase per $\mu(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \varepsilon)$.

Figure 2

I punti critici del sistema sono le soluzioni di

$$\begin{cases} y - 2y^2 = 0 \\ 4y^3 - \sin x = 0 \end{cases}$$

che sono

$$P_1 = (0,0)\,, P_2 = (\pi, 0)\,, P_3 = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)\ , \text{ e } P_4 = \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

Il campo di vettori ha matrice jacobiana

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 - 4y \\ -\cos x & 12y^2 \end{pmatrix}$$

dunque per i punti critici otteniamo:
$P_1 = (0,0)$. La linearizzazione in P_1 ha matrice

$$JF(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda_\pm = \pm i$. Dunque P_1 è linearmente un centro;
$P_2 = (\pi, 0)$. La linearizzazione in P_2 ha matrice

$$JF(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda_\pm = \pm 1$. Dunque P_2 è linearmente una sella con varietà instabile e stabile tangenti rispettivamente ai due autovettori

$$v_+ = (1,1) \quad \text{e} \quad v_- = (1,-1)$$

$P_3 = (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$. La linearizzazione in P_3 ha matrice

$$JF(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda_\pm = \frac{3\pm\sqrt{9+2\sqrt{3}}}{2}$, con $\lambda_+ > 0$ e $\lambda_- < 0$. Dunque P_3 è linearmente una sella con varietà instabile e stabile tangenti rispettivamente ai due autovettori

$$v_+ = (1, -\lambda_+) \quad \text{e} \quad v_- = (1, -\lambda_-)$$

$P_4 = (\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2})$. La linearizzazione in P_4 ha matrice

$$JF(P_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda_\pm = \frac{3\pm\sqrt{9-2\sqrt{3}}}{2}$, entrambi positivi. Dunque P_4 è linearmente un nodo instabile. Per il ritratto di fase è utile trovare i due autovettori

$$v_+ = (1, -\lambda_+) \quad \text{e} \quad v_- = (1, -\lambda_-)$$

(ii) mostrare che il punto $(0,0)$ *non è un centro per il sistema;*

Abbiamo visto che $(0,0)$ è linearmente un centro, e vogliamo mostrare che invece non lo è nel sistema non-lineare originale. Dunque $(0,0)$ è un fuoco stabile o instabile.

Per mostrare che $(0,0)$ non è un centro è sufficiente mostrare che non possono esserci orbite periodiche intorno a $(0,0)$. Osserviamo che

$$\mathrm{div}(F)(x,y) = 12y^2 \geq 0$$

e ripetiamo il ragionamento del Criterio di non-esistenza di Bendixson. Se Γ fosse il sostegno di un'orbita periodica intorno a $(0,0)$ con U parte di piano racchiusa, usando la notazione $F = (f(x,y), g(x,y))$ per il campo, si avrebbe

$$0 = \int_\Gamma f(x,y)dy - g(x,y)dx = \iint_U \mathrm{div(F)}(x,y)\, dxdy$$

che è un assurdo essendo la divergenza del campo positiva a meno di un insieme di misura nulla.

(iii) disegnare un possibile ritratto di fase per il sistema.

Usando le informazioni dei punti (i) e (ii), tra cui in particolare la non-esistenza di orbite periodiche, e studiando il segno delle componenti del campo di vettori, un possibile ritratto di fase è quello in figura 3.

Esercizio 3. *Data la funzione* $f_a : [0,1] \to [0,1]$ *definita da*

$$f_a(x) = \begin{cases} 2x\,, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ a(1-x)\,, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

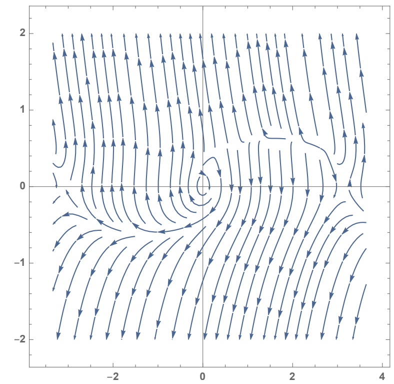


Figure 3: Il ritratto di fase dell'esercizio 2.

con $a \in (0, 1]$,

(i) disegnare il grafico di $f_a^2(x)$*;*

Il grafico di $f_a(x)$ è nella figura 4a, mentre quello di $f_a^2(x)$ è nella figura 4b. Osserviamo che $f_a(\frac{1}{2}) = \frac{a}{2}$, e dunque in particolare $f(\frac{1}{2}, 1) \subset (0, \frac{1}{2})$. Dal grafico di f_a si osserva dunque che per $a \in (0, 1)$, f_a ha solo un punto fisso per $x = 0$, mentre se $a = 1$, f_a ha un altro punto fisso per $x = \frac{1}{2}$.

(a) Il grafico di $f_a(x)$ per $a = \frac{2}{3}$.

(b) Il grafico di $f_a^2(x)$ per $a = \frac{2}{3}$.

Figure 4

(ii) studiare esistenza e stabilità di orbite periodiche di periodo minimo 2 al variare di $a \in (0, 1)$*;*

Osserviamo che $f_a^2(\frac{1}{4}) = \frac{a}{2}$ e $f_a^2(\frac{1}{2}) = a$, dunque f_a^2 ha punti fissi diversi da $x = 0$ per $a \in [\frac{1}{2}, 1)$. In questo caso dunque esiste un'orbita periodica di periodo minimo 2, ed è data dai punti $\{\frac{a}{1+2a}, \frac{2a}{1+2a}\}$.
Per $a > \frac{1}{2}$ si ottiene $(f_a^2)'(\frac{a}{1+2a}) = (f_a^2)'(\frac{2a}{1+2a}) = 2a > 1$, dunque l'orbita periodica è instabile.
Per $a = \frac{1}{2}$ l'orbita periodica è data dai punti $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$, e dunque f_a^2 non è derivabile nei punti dell'orbita (anche considerando la derivata destra si trova che vale 1, dunque non è un punto iperbolico). Studiando però la dinamica dei punti in un intorno dei punti dell'orbita, si ottiene che anche in questo caso l'orbita è instabile.

(iii) nel caso $a = 1$, disegnare l'f-grafo relativo alla partizione $J_1 = [0, \frac{1}{2}]$, $J_2 = [\frac{1}{2}, 1]$, e studiare esistenza e stabilità di orbite periodiche di periodo minimo $n \geq 2$.

Per $a = 1$ si ha $f_1(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, dunque l'$f$-grafo è quello in figura 5. La mappa f_a non è continua,

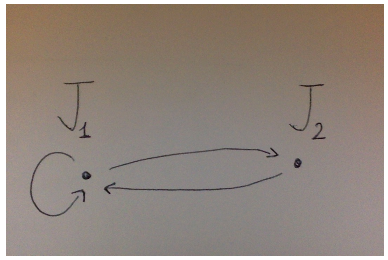
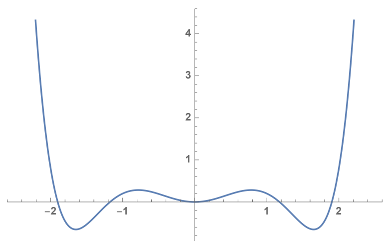
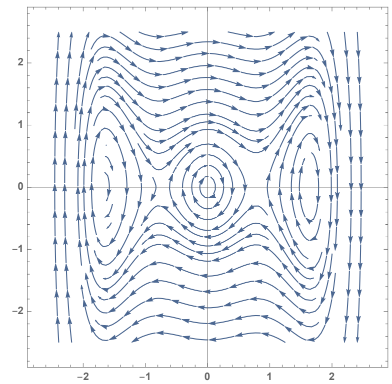


Figure 5: L'f-grafo di f_a per $a = 1$

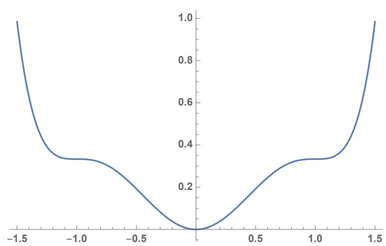
e non possiamo quindi applicare il Teorema di Sharkovski direttamente. Possiamo invece usare l'esistenza di cammini ammissibili nell'f-grafo, visto che f è continua se ristretta a J_1 e J_2. Dunque, usando i cammini ammissibili $J_1 \ldots J_1 J_2 J_1$ di lunghezza maggiore o uguale a 3, otteniamo l'esistenza di orbite periodiche di periodo minimo n per ogni $n \geq 2$. Ognuna di queste orbite è instabile visto che $|(f^n)'| \geq 2$ per ogni n.



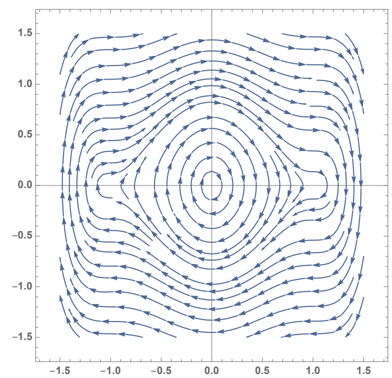
(a) Il grafico di V_μ per $\mu = \frac{1}{5}$.



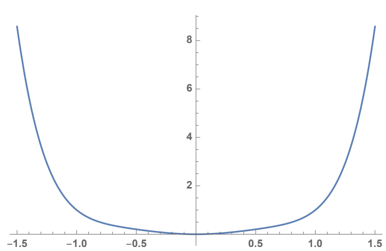
(b) Ritratto di fase per $\mu = \frac{1}{5}$.



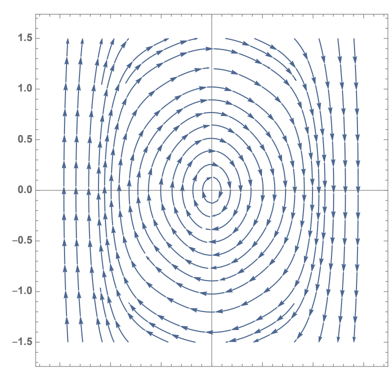
(c) Il grafico di V_μ per $\mu = \frac{1}{3}$.



(d) Ritratto di fase per $\mu = \frac{1}{3}$.



(e) Il grafico di V_μ per $\mu = 1$.



(f) Ritratto di fase per $\mu = 1$.

Figure 6