

Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 16-02-2026

Esercizio 1. (10 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2\mu - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2x^3 - 2x + \varepsilon y \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^4 + x^2 - \mu \right) \end{cases}$$

con $\varepsilon \in \{0, 1\}$ e $\mu \in \mathbb{R}$.

- (a) Per $\varepsilon = 0$, disegnare il ritratto di fase.
- (b) Per $\varepsilon = 1$, mostrare che esistono valori di $\mu \in \mathbb{R}$ per cui il sistema ammette almeno un'orbita periodica.

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la funzione continua $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x + 6x^2, & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 2 - 3x, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ x - 6(1 - x)^2, & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

- (a) Determinare esistenza e stabilità dei punti fissi.
- (b) Costruire l' f -grafo della partizione $\mathcal{J} = \{[0, \frac{1}{3}], [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}], [\frac{2}{3}, 1]\}$.
- (c) Disegnare (approssimativamente) il grafico di f^2 . Trovare una corrispondenza tra i punti fissi di f^2 che si vedono nel grafico e i cammini chiusi ammissibili nell' f -grafo costruito prima.

ESERCIZIO

1

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2\mu - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Troviamo i punti fissi del sistema. Dalla seconda equazione, abbiamo $y = x$. Sostituendo nella prima, otteniamo $2x(\mu - x^2) = 0$, da cui $x = 0$ oppure $x = \pm\sqrt{\mu}$ se $\mu \geq 0$.

Quindi i punti fissi sono:

$$P_1 = (0, 0), \quad \text{se } \mu \in (-\infty, 0]$$

$$P_1 = (0, 0), P_2 = (\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu}), P_3 = (-\sqrt{\mu}, -\sqrt{\mu}), \quad \text{se } \mu \in (0, +\infty).$$

Studiamo le loro stabilità. Si ha

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} 2\mu - 3x^2 - y^2 & -2xy \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi, se $\mu \in (-\infty, 0)$:

- $JF(P_1) = \begin{pmatrix} 2\mu & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det JF(P_1) = 2\mu < 0$. Quindi P_1 è punto iperbolico di tipo sella. Gli autovalori di $JF(P_1)$ sono $\lambda_- = 2\mu$, $\lambda_+ = 1$, con autovettori

$$v_- = \begin{pmatrix} 1 - 2\mu \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

se $\mu = 0$:

- $JF(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det JF(P_1) = 0$. Quindi P_1 è non iperbolico. Le sue stabilità le ricaveremo dal reticolo di fase;

se $\mu \in (0, +\infty)$:

- $JF(P_2) = \begin{pmatrix} 2\mu & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, gli autovalori sono $\lambda_1 = 2\mu$, $\lambda_2 = 1$, entrambi reali e positivi, quindi P_2 è un punto iperbolico di tipo non instabile;

- $JF(P_2) = JF(P_3) = \begin{pmatrix} -2\mu & -2\mu \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det JF(P_2) = \det JF(P_3) = -4\mu < 0$. Quindi P_2 e P_3 sono punti iperbolici di tipo sella. Gli autovalori sono

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} - \mu \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \mu\right)^2 + 4\mu} \quad \text{e gli autovettori}$$

$$v_- = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_- \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_+ = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_+ \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rette invarianti. Poiché $\dot{x}|_{x=0} \equiv 0$, l'asse $\{x=0\}$ è invariante. Non ci sono altre rette invarianti.

Orbite periodiche. Per la teoria dell'indice di Poincaré, le orbite periodiche potrebbero esistere solo per $\mu \geq 0$ (per $\mu=0$ non è chiaro) racchiudendo solo P_1 . Ma poiché P_1 sta sulla retta invariante $x=0$, per l'unicità locale delle soluzioni, non possono esserci orbite periodiche.

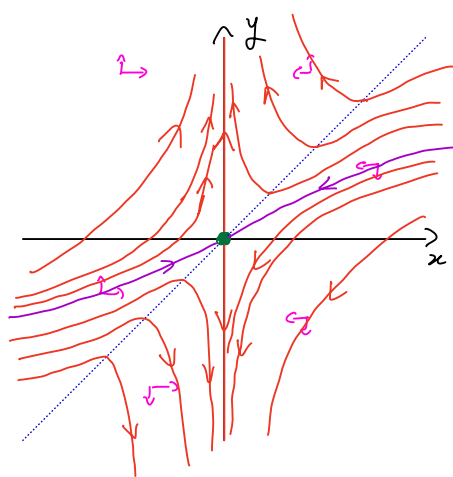
Simmetria. Se $(x(t), y(t))$ è soluzione del sistema, lo è anche $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(t), -y(t))$.

Infatti, ponendo $S(x, y) = (-x, -y)$ si ha

$$JS_{(x,y)}(F(x,y)) = (-x(2\mu - x^2 - y^2), x - y) = F(S(x,y))$$

Ritrazzi di fase.

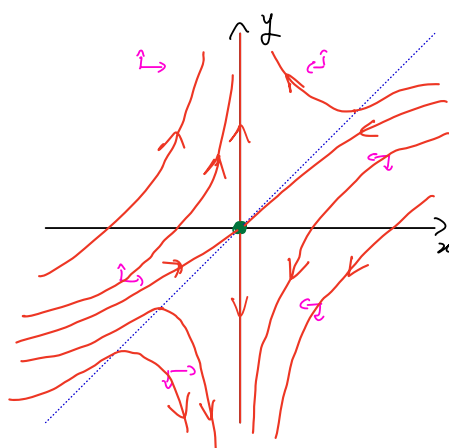
$$\mu \in (-\infty, 0)$$



$$\dot{y} = 0 \text{ ---}$$

$$W^s(P_1) \text{ ---}$$

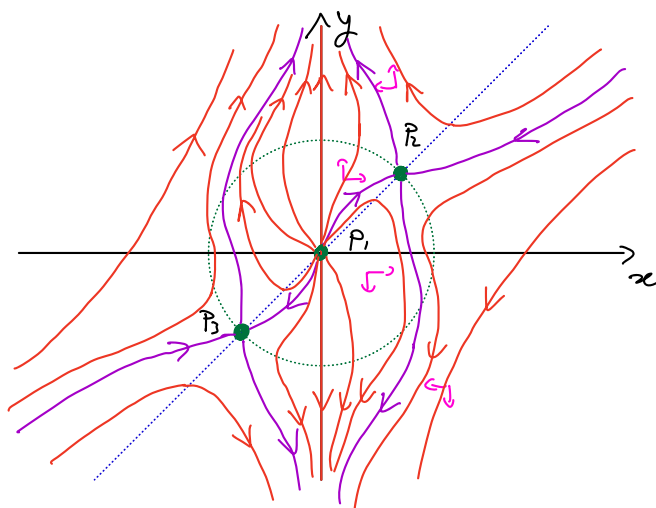
$$\mu = 0$$



$$\dot{y} = 0 \text{ ---}$$

$$W^s(P_1) \text{ ---}$$

$$\mu \in (0, +\infty)$$



$$\dot{x} = 0 \text{ ---}$$

$$\dot{y} = 0 \text{ ---}$$

$$W^{s,\mu}(P_2), W^{s,\mu}(P_3) \text{ ---}$$

ESERCIZIO

2

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2x^3 - 2x + \varepsilon y \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^4 + x^2 - \mu \right) \end{cases}$$

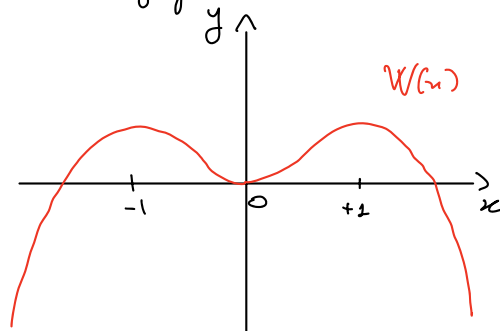
$$\mu \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon \in \{0, 1\}$$

(a) Per $\varepsilon=0$, il sistema è hamiltoniano ad un grado di libertà di tipo

meccanico, con $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^4 + x^2$. Ponendo $W(x) = -\frac{1}{2}x^4 + x^2$ si ha $W(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, $W'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, +1, -1\}$, $W(+1) = W(-1) = \frac{1}{2}$.

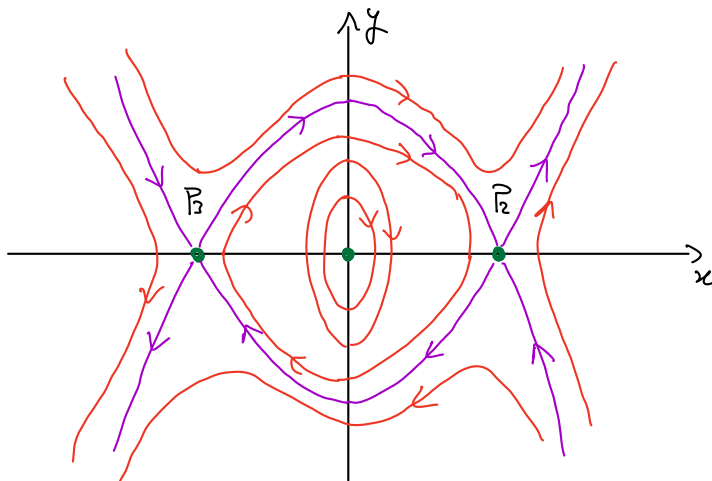
Inoltre, W è pari, quindi ha grafico



Ne segue che $P_1 = (0, 0)$ è un punto fisso di tipo centro, mentre $P_2 = (+1, 0)$ e $P_3 = (-1, 0)$ sono punti fissi di tipo sella. Inoltre il sistema ammette le simmetrie $S_1(x, y) = (x, -y)$ e $S_2(x, y) = (-x, y)$, infatti

$$JS_1(F(x, y)) = (y, -2x^3 + 2x) = -F(S_1(x, y)), \quad JS_2(F(x, y)) = (-y, 2x^3 - 2x) = -F(S_2(x, y)).$$

Si ottiene il seguente ritratto di fase



$$W^{s,u}(P_2), W^{s,u}(P_3) -$$

(b)

Per $\varepsilon=1$, osserviamo che il sistema si può scrivere nelle forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2x^3 - 2x + y(H(x,y) - \mu) \end{cases}$$

usando la funzione hamiltoniana del punto (a). In particolare, ne segue che per questo sistema

$$\begin{aligned} \dot{H}(x,y) &= \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = (-2x^3 + 2x)y + y(2x^3 - 2x + y(H(x,y) - \mu)) = \\ &= y^2(H(x,y) - \mu). \end{aligned}$$

Quindi l'insieme di livello $\{H(x,y) = \mu\}$ è un insieme invariante. Per dimostrare l'esistenza di un'orbita periodica, è sufficiente scegliere $\mu \in \mathbb{R}$ in modo che l'insieme $\{H(x,y) = \mu\}$ contenga una componente connessa data da una curva chiusa senza punti fissi.

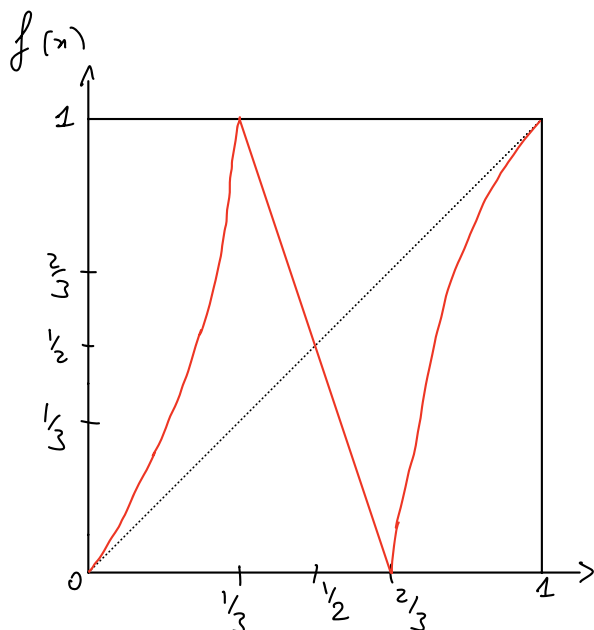
Osserviamo che, per $\varepsilon = 1$, i punti fissi sono ancora $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (-1,0)$. Inoltre, il risultato di fase del punto (a) ci dice che $\{H(x,y) = \mu\}$ contiene una curva chiusa se $\mu \in (H(0,0), H(1,0)) = (0, \frac{1}{2})$.

Quindi il sistema ammette un'orbita periodica per ogni $\mu \in (0, \frac{1}{2})$.

ESERCIZIO

3

$$f(x) = \begin{cases} x + 6x^2, & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 2 - 3x, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ x - 6(1-x)^2, & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$



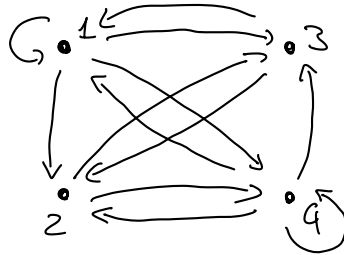
(a)

I punti fissi di f sono $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$. Si ha che $f'(0) = f'(1) = 1$,

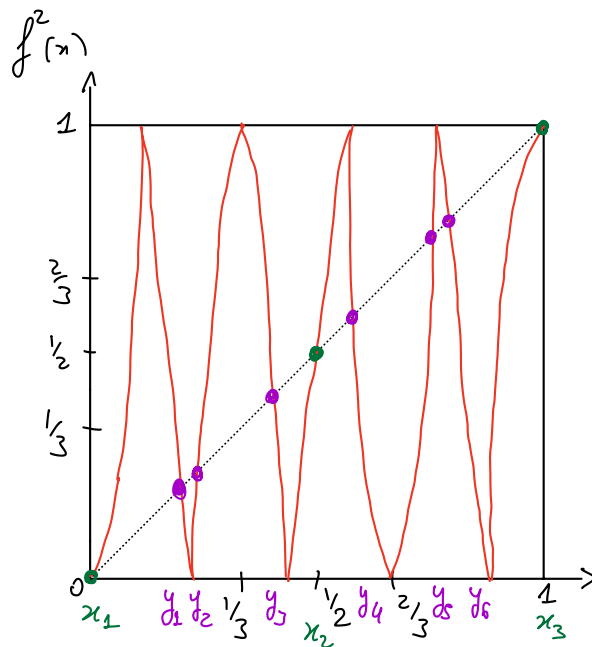
mentre $f'(\frac{1}{2}) = -3$. Quindi x_2 è iperbolico repulsivo, mentre x_1 e x_3 non sono iperbolici.

Si ha $f''(x_1) > 0$, quindi x_1 è repulsivo da destra, e $f''(x_3) < 0$, quindi x_3 è repulsivo da sinistra. Essendo punti estremi di $[0, 1]$ si ha che x_1 e x_3 sono repulsivi.

(b) Sia data la partizione $\mathcal{I}$ con: $\mathcal{I}_1 = [0, \frac{1}{3}]$, $\mathcal{I}_2 = [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $\mathcal{I}_3 = [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$, $\mathcal{I}_4 = [\frac{2}{3}, 1]$.
L' f -grafo, usando $f(\mathcal{I}_1) = f(\mathcal{I}_4) = [0, 1]$, $f(\mathcal{I}_2) = [\frac{1}{2}, 1]$, $f(\mathcal{I}_3) = [0, \frac{1}{2}]$, è



(c) Si ha $f([0, \frac{1}{3}]) = f([\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]) = f([\frac{2}{3}, 1]) = [0, 1]$, quindi f^2 ha un grafico di questo tipo.



f^2 ha 9 punti fissi: tre sono i punti fissi x_1, x_2, x_3 ; sei sono punti periodici di periodo minimo 2, che indichiamo con $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ (come in figura).

Guardando inoltre l' f -grafo del punto (b), troviamo i seguenti cammini chiusi ammissibili di lunghezza tre: 111, 131, 141, 232, 242, 313, 323, 414, 424, 444.

Abbiniamo i punti fissi di f^2 ai 10 componenti chiusi.

111 si abbina a $x_1 \in J_1$

444 si abbina a $x_3 \in J_4$

232 e 323 si abbinano a $x_2 \in J_2 \cap J_3$

131 si abbina a y_1

141 si abbina a y_2

242 si abbina a y_3

313 si abbina a y_4

414 si abbina a y_5

424 si abbina a y_6

Si ricava quindi che le tre orbite periodiche di periodo 2 sono

$\{y_1, y_4\}$, $\{y_2, y_5\}$, $\{y_3, y_6\}$.