Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito A del 14-06-2017

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (14 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \log\left(1 + (x^2\,y^2)^{\frac{1}{3}}\right)$$

i) dire se esiste e, in caso affermativo, calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P = (\sqrt{2}, 2)$ nella direzione $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)$;

ii) dire se f è differenziabile in $Q = (0,0)$;

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, xy \leq 2\,,\, \frac{1}{2}x \leq y \leq 2x\right\}\,.$$

Esercizio 2. (8 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega (x + y - 1)\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, x^2 + y^2 \geq 4\,,\, \frac{x^2}{7} + \frac{(y-1)^2}{4} \leq 1\right\}$.

Esercizio 3. (8 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x^2 + y^2 + z^2 = 1 - x\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(0\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

ii) fare un disegno approssimativo di Σ e scriverne una parametrizzazione globale.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \log\left(1 + (x^2\,y^2)^{\frac{1}{3}}\right)$$

i) dire se esiste e, in caso affermativo, calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P = (\sqrt{2}, 2)$ nella direzione $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)$;

Il dominio naturale della funzione è $\mathbb{R}^2$ e $f(x,y)$ si può scrivere come composizione delle funzioni $g(t) = \log(1+t)$ e $h(x,y) = (x^2\,y^2)^{\frac{1}{3}}$. La funzione g è differenziabile su tutto il suo dominio $\{t > -1\}$, e h è differenziabile certamente in un intorno dei punti in cui $xy \neq 0$. Dunque certamente f è differenziabile in P.

Per determinare l'esistenza della derivata direzionale di f in P nella direzione $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)$, abbiamo due possibilità. La prima è usare la definizione di derivata direzionale, e dunque studiare l'esistenza del limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(P+tv) - f(P)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\sqrt{2} + t\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\,2 + t\frac{1}{2}\right) - f(\sqrt{2},2)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\log\left(1 + (8 + \frac{3t^4 + (4\sqrt{6}+24)t^3 + (32\sqrt{6}+56)t^2 + (64\sqrt{6}+64)t}{16})^{\frac{1}{3}}\right) - \log(3)}{t} = \frac{1+\sqrt{6}}{9}\,.$$

La seconda strada è usare la differenziabilità di f in P per scrivere

$$D_v f(P) = < \nabla f(P), v >$$

Dunque calcoliamo il gradiente di f in P, che risulta essere

$$\nabla f(P) = \begin{pmatrix} \frac{2xy^2}{3\,(x^2\,y^2)^{\frac{2}{3}}\left(1+(x^2\,y^2)^{\frac{1}{3}}\right)} \\ \frac{2x^2y}{3\,(x^2\,y^2)^{\frac{2}{3}}\left(1+(x^2\,y^2)^{\frac{1}{3}}\right)} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(\sqrt{2},2)} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{9} \\ \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$D_v f(P) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{2\sqrt{2}}{9} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{9} = \frac{1+\sqrt{6}}{9}\,.$$

ii) dire se f è differenziabile in $Q = (0,0)$;

Scrivendo come sopra f come composizione delle funzioni $g(t)$ e $h(x,y)$, non possiamo concludere perché $Q \notin \{xy \neq 0\}$. Dobbiamo dunque procedere verificando la definizione.

Iniziamo studiando l'esistenza delle derivate parziali di f in $(0,0)$. si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

Dobbiamo poi vedere se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Sostituendo i valori della funzione e delle sue derivate parziali, si ottiene usando $\log(1+\tau)\sim\tau$ per $\tau\to 0$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log\left(1+(x^2\,y^2)^{\frac{1}{3}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2\,y^2)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Per dimostrare che l'ultimo limite è uguale a 0, usiamo il criterio del confronto con la disuguaglianza $2ab\le a^2+b^2$ con $a=|x|$ e $b=|y|$, e scriviamo

$$0\le\left|\frac{(x^2\,y^2)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le 4^{-\frac{1}{3}}\,\frac{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = 4^{-\frac{1}{3}}\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{6}}$$

e osserviamo che la funzione $G(x,y)=4^{-\frac{1}{3}}\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{6}}$ è continua nell'origine essendo composizione di funzioni continue.

Abbiamo quindi verificato che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

e dunque la funzione è differenziabile in $Q=(0,0)$.

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x\ge 0\,,\,y\ge 0\,,\,xy\le 2\,,\,\frac{1}{2}x\le y\le 2x\right\}\,.$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω , sui punti critici vincolati al bordo di Ω e sugli eventuali spigoli del bordo.

La funzione f è certamente differenziabile in $\overset{\circ}{\Omega}$, perché $\overset{\circ}{\Omega}\subset\{xy\neq 0\}$. Nei punti di $\overset{\circ}{\Omega}$ possiamo calcolare il gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2xy^2}{3\,(x^2\,y^2)^{\frac{2}{3}}\left(1+(x^2\,y^2)^{\frac{1}{3}}\right)} \\ \frac{2x^2y}{3\,(x^2\,y^2)^{\frac{2}{3}}\left(1+(x^2\,y^2)^{\frac{1}{3}}\right)} \end{pmatrix}$$

e si verifica che non ci sono punti critici liberi in $\overset{\circ}{\Omega}$.

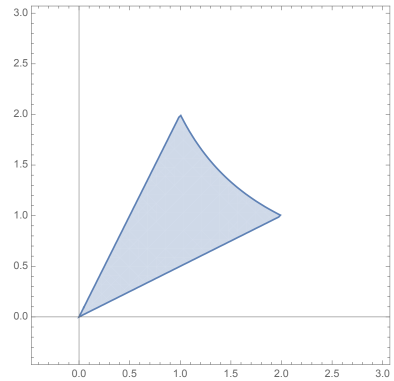

Figure 1: L'insieme Ω.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La funzione f è differenziabile su tutto il bordo per quanto visto nel punto ii) dell'esercizio. Il bordo lo dividiamo in tre parti:

$$\Gamma_1 = \{xy = 2\,,\ 1 \le x \le 2\}$$

$$\Gamma_2 = \{y = 2x\,,\ 0 \le x \le 1\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{y = \frac{1}{2}x\,,\ 0 \le x \le 2\right\} .$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = \left(t\,,\ \frac{2}{t}\right), \qquad t \in [1, 2]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \log\left(1 + 4^{\frac{1}{3}}\right), \qquad t \in [1, 2]\ .$$

Risulta $g_1'(t) = 0$, dunque tutti i punti sono critici vincolati, ed essendo la funzione costante basterà considerare il valore sugli spigoli S_1 e S_2.

Passiamo a Γ_2, per cui possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (t\,,\ 2t)\,, \qquad t \in [0, 1]$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = \log\left(1 + 4^{\frac{1}{3}}\, t^{\frac{4}{3}}\right), \qquad t \in [0, 1]$$

Abbiamo $g_2'(t) = \frac{4^{\frac{1}{3}}}{1+4^{\frac{1}{3}}\, t^{\frac{4}{3}}}\ \frac{4}{3}\, t^{\frac{1}{3}}$ in $(0, 1)$, e dunque non ci sono punti critici.

Per quanto riguarda Γ_3 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_3(t) = \left(t\,,\ \frac{1}{2}t\right), \qquad t \in [0,2]$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = \log\left(1 + 4^{-\frac{1}{3}}\, t^{\frac{4}{3}}\right), \qquad t \in [0,2]$$

Abbiamo $g_3'(t) = \frac{4^{-\frac{1}{3}}}{1+4^{-\frac{1}{3}}\,t^{\frac{4}{3}}}\,\frac{4}{3}\,t^{\frac{1}{3}}$ in $(0,2)$, e dunque non ci sono punti critici.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = f(S_2) = \log\left(1 + 4^{\frac{1}{3}}\right), \quad f(S_3) = 0\,.$$

Dunque il massimo di f è $\log\left(1 + 4^{\frac{1}{3}}\right)$ e il minimo è 0.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega (x + y - 1)\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \geq 0\,,\ x^2 + y^2 \geq 4\,,\ \frac{x^2}{7} + \frac{(y-1)^2}{4} \leq 1\right\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

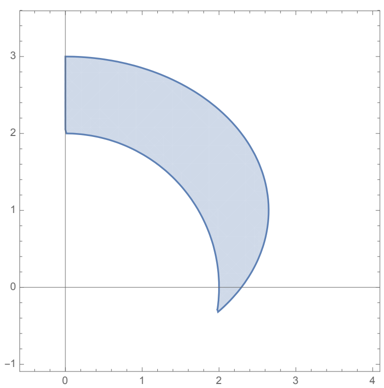

Figure 2: L'insieme Ω.

Scriviamo Ω come insieme semplice rispetto alla x. Troviamo innanzitutto il punto A in Ω di intersezione della circonferenza e dell'ellisse che delimitano l'insieme. Cerchiamo quindi una soluzione del sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \\ \frac{x^2}{7} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \end{cases}$$

Troviamo $x^2 = 4 - y^2$ dalla seconda, e sostituiamo nella terza. Si ottiene l'equazione

$$3y^2 - 14y - 5 = 0$$

che ha soluzioni $y_1 = 5$ e $y_2 = -\frac{1}{3}$. La soluzione y_1 non è accettabile (troveremmo $x^2 = -21$), e quindi otteniamo che la coordinata y del punto A è $y = -\frac{1}{3}$.

Possiamo quindi scrivere $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ dove

$$\Omega_1 = \left\{ (x,y) \,:\, -\frac{1}{3} \le y \le 2\,,\ \sqrt{4-y^2} \le x \le \sqrt{7}\sqrt{1 - \frac{(y-1)^2}{4}} \right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{ (x,y) \,:\, 2 \le y \le 3\,,\ 0 \le x \le \sqrt{7}\sqrt{1 - \frac{(y-1)^2}{4}} \right\}$$

Dunque

$$\iint_\Omega (x+y-1)\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} (x+y-1)\,dx\,dy + \iint_{\Omega_2} (x+y-1)\,dx\,dy$$

Calcoliamo i due integrali:

$$\iint_{\Omega_1} (x+y-1)\,dx\,dy = \int_{-\frac{1}{3}}^{2} \left(\int_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{7}\sqrt{1-\frac{(y-1)^2}{4}}} (x+y-1)\,dx \right) dy =$$

$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{2} \left(\frac{1}{2}x^2 + (y-1)x \right) \Big|_{x=\sqrt{4-y^2}}^{x=\sqrt{7}\sqrt{1-\frac{(y-1)^2}{4}}} dy =$$

$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{2} \left(\frac{7}{2} - \frac{7(y-1)^2}{8} - 2 + \frac{y^2}{2} + \sqrt{7}\,(y-1)\sqrt{1 - \frac{(y-1)^2}{4}} - y\sqrt{4-y^2} + \sqrt{4-y^2} \right) dy =$$

$$= \left(\frac{3}{2}y - \frac{7}{24}(y-1)^3 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{4\sqrt{7}}{3}\Big(1 - \frac{(y-1)^2}{4}\Big)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(4-y^2)^{\frac{3}{2}} + 2\,\arcsin\frac{y}{2} + \frac{1}{2}y\sqrt{4-y^2} \right) \Big|_{-\frac{1}{3}}^{2}\,;$$

$$\iint_{\Omega_2} (x+y-1)\,dx\,dy = \int_{2}^{3} \left(\int_{0}^{\sqrt{7}\sqrt{1-\frac{(y-1)^2}{4}}} (x+y-1)\,dx \right) dy =$$

$$= \int_{2}^{3} \left(\frac{1}{2}x^2 + (y-1)x \right) \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{7}\sqrt{1-\frac{(y-1)^2}{4}}} dy =$$

$$= \int_{2}^{3} \left(\frac{7}{2} - \frac{7(y-1)^2}{8} + \sqrt{7}(y-1)\sqrt{1 - \frac{(y-1)^2}{4}} \right) dy =$$

$$= \left(\frac{7}{2}y - \frac{7}{24}(y-1)^3 - \frac{4\sqrt{7}}{3}\Big(1 - \frac{(y-1)^2}{4}\Big)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{2}^{3}.$$

Si ottiene quindi

$$\iint_\Omega (x+y-1)\,dx\,dy = \frac{7(41-\sqrt{35})}{54} + \pi + 2\arcsin\left(\frac{1}{6}\right)\,.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x^2 + y^2 + z^2 = 1 - x\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ *nel punto* $P = \left(0\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$*;*

Possiamo considerare Σ come insieme di livello della funzione differenziabile

$$F(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + x$$

che verifica

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x+1 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla F(P) = \nabla F\left(0\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

Quindi P è un punto regolare per Σ, e l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è data da

$$x + \sqrt{2}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2}\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0\,.$$

ii) fare un disegno approssimativo di Σ *e scriverne una parametrizzazione globale;*

Scrivendola nella forma

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y^2 + z^2 = 1 - x - 2x^2\right\}$$

la superficie si può interpretare come superficie di rotazione, ottenuta facendo ruotare intorno all'asse x il grafico della funzione $g(x) = \sqrt{1 - x - 2x^2}$, definita in $[-1, \frac{1}{2}]$, dunque parametrizzandola come superficie di rotazione possiamo scrivere che $\Sigma = \sigma(D)$ dove

$$D = \left\{(t,\varphi) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \,:\, -1 \leq t \leq \frac{1}{2}\right\}$$

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{con} \qquad \sigma(t,\varphi) = \left(t\,,\,\sqrt{1-t-2t^2}\,\cos\varphi\,,\,\sqrt{1-t-2t^2}\,\sin\varphi\right)$$

Il disegno di Σ è l'ellissoide in figura 3.

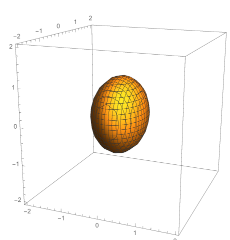

Figure 3: La superficie Σ.

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito B del 14-06-2017

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (14 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \log\left(1 + (x^2\, y^2)^{\frac{2}{5}}\right)$$

i) dire se esiste e, in caso affermativo, calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P = (2\,,\, 2\sqrt{2})$ nella direzione $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

ii) dire se f è differenziabile in $Q = (0,0)$;

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, xy \leq 3\,,\, \frac{1}{3}x \leq y \leq 3x\right\}\,.$$

Esercizio 2. (8 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega (x + y - 1)\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, x^2 + y^2 \leq 9\,,\, \frac{x^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{9} \geq 1\right\}$.

Esercizio 3. (8 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + 3y^2 + z^2 = 1 - 2y\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,, 0\,,\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

ii) fare un disegno approssimativo di Σ e scriverne una parametrizzazione globale.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \log\left(1 + (x^2\, y^2)^{\frac{2}{5}}\right)$$

i) dire se esiste e, in caso affermativo, calcolare la derivata direzionale di f nel punto $P = (2\,,\, 2\sqrt{2})$ nella direzione $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

Il dominio naturale della funzione è $\mathbb{R}^2$ e $f(x,y)$ si può scrivere come composizione delle funzioni $g(t) = \log(1+t)$ e $h(x,y) = (x^2\, y^2)^{\frac{1}{5}}$. La funzione g è differenziabile su tutto il suo dominio $\{t > -1\}$, e h è differenziabile certamente in un intorno dei punti in cui $xy \neq 0$. Dunque certamente f è differenziabile in P.

Per determinare l'esistenza della derivata direzionale di f in P nella direzione $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, abbiamo due possibilità. La prima è usare la definizione di derivata direzionale, e dunque studiare l'esistenza del limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(P+tv) - f(P)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(2 + t\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\, 2\sqrt{2} + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(2\,,\,2\sqrt{2})}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\log\left(1 + (32 + \frac{t^4 + (8+4\sqrt{2})t^3 + (24+32\sqrt{2})t^2 + (64+64\sqrt{2})t}{4})^{\frac{2}{5}}\right) - \log(5)}{t} = \frac{4}{25}\,(1+\sqrt{2})\,.$$

La seconda strada è usare la differenziabilità di f in P per scrivere

$$D_v f(P) = < \nabla f(P), v >$$

Dunque calcoliamo il gradiente di f in P, che risulta essere

$$\nabla f(P) = \begin{pmatrix} \frac{4xy^2}{5\,(x^2\,y^2)^{\frac{3}{5}}\left(1 + (x^2\,y^2)^{\frac{2}{5}}\right)} \\ \frac{4x^2y}{5\,(x^2\,y^2)^{\frac{3}{5}}\left(1 + (x^2\,y^2)^{\frac{2}{5}}\right)} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(2\,,\,2\sqrt{2})} = \begin{pmatrix} \frac{8}{25} \\ \frac{4}{25}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$D_v f(P) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{8}{25} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{4}{25}\,\sqrt{2} = \frac{4}{25}\,(1+\sqrt{2})\,.$$

ii) dire se f è differenziabile in $Q = (0,0)$;

Scrivendo come sopra f come composizione delle funzioni $g(t)$ e $h(x,y)$, non possiamo concludere perché $Q \notin \{xy \neq 0\}$. Dobbiamo dunque procedere verificando la definizione.

Iniziamo studiando l'esistenza delle derivate parziali di f in $(0,0)$. si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

Dobbiamo poi dimostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Sostituendo i valori della funzione e delle sue derivate parziali, si ottiene usando $\log(1+\tau)\sim\tau$ per $\tau\to 0$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log\left(1+(x^2\,y^2)^{\frac{2}{5}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2\,y^2)^{\frac{2}{5}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Per dimostrare che l'ultimo limite è uguale a 0, usiamo il criterio del confronto con la disuguaglianza $2ab\le a^2+b^2$ con $a=|x|$ e $b=|y|$, e scriviamo

$$0\le\left|\frac{(x^2\,y^2)^{\frac{2}{5}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le 4^{-\frac{2}{5}}\,\frac{(x^2+y^2)^{\frac{4}{5}}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = 4^{-\frac{2}{5}}\,(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}}$$

e osserviamo che la funzione $G(x,y)=4^{-\frac{2}{5}}\,(x^2+y^2)^{\frac{3}{10}}$ è continua nell'origine essendo composizione di funzioni continue.

Abbiamo quindi verificato che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

e dunque la funzione è differenziabile in $Q=(0,0)$.

iii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\ge 0\,,\ y\ge 0\,,\ xy\le 3\,,\ \frac{1}{3}x\le y\le 3x\right\}\,.$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 4.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω , sui punti critici vincolati al bordo di Ω e sugli eventuali spigoli del bordo.

La funzione f è certamente differenziabile in $\overset{\circ}{\Omega}$, perché $\overset{\circ}{\Omega}\subset\{xy\neq 0\}$. Nei punti di $\overset{\circ}{\Omega}$ possiamo calcolare il gradiente

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{4xy^2}{5\,(x^2\,y^2)^{\frac{3}{5}}\left(1+(x^2\,y^2)^{\frac{2}{5}}\right)} \\ \frac{4x^2y}{5\,(x^2\,y^2)^{\frac{3}{5}}\left(1+(x^2\,y^2)^{\frac{2}{5}}\right)} \end{pmatrix}$$

e si verifica che non ci sono punti critici liberi in $\overset{\circ}{\Omega}$.

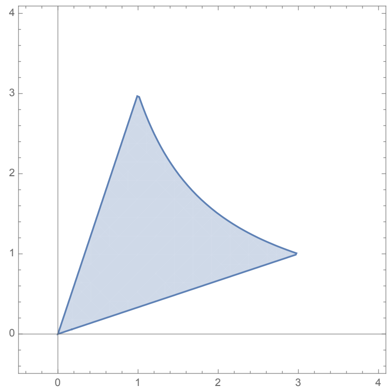

Figure 4: L'insieme Ω.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La funzione f è differenziabile su tutto il bordo per quanto visto nel punto ii) dell'esercizio. Il bordo lo dividiamo in tre parti:

$$\Gamma_1 = \{xy = 3\,,\ 1 \le x \le 3\}$$
$$\Gamma_2 = \{y = 3x\,,\ 0 \le x \le 1\}$$
$$\Gamma_3 = \left\{y = \frac{1}{3}x\,,\ 0 \le x \le 3\right\} .$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = \left(t\,,\ \frac{3}{t}\right), \qquad t \in [1,3]\ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \log\left(1 + 3^{\frac{4}{5}}\right), \qquad t \in [1,3]\ .$$

Risulta $g_1'(t) = 0$, dunque tutti i punti sono critici vincolati, ed essendo la funzione costante basterà considerare il valore sugli spigoli S_1 e S_2.

Passiamo a Γ_2, per cui possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (t\,,\ 3t)\,, \qquad t \in [0,1]$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = \log\left(1 + 3^{\frac{4}{5}}\, t^{\frac{8}{5}}\right), \qquad t \in [0,1]$$

Abbiamo $g_2'(t) = \frac{3^{\frac{4}{5}}}{1+3^{\frac{4}{5}}\, t^{\frac{8}{5}}}\, \frac{8}{5}\, t^{\frac{3}{5}}$ in $(0,1)$, e dunque non ci sono punti critici.

Per quanto riguarda Γ_3 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_3(t) = \left(t \, , \, \frac{1}{3} t \right) , \qquad t \in [0, 3]$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = \log \left(1 + 3^{-\frac{4}{5}} \, t^{\frac{8}{5}} \right) , \qquad t \in [0, 3]$$

Abbiamo $g_3'(t) = \frac{3^{-\frac{4}{5}}}{1+3^{-\frac{4}{5}} \, t^{\frac{8}{5}}} \, \frac{8}{5} \, t^{\frac{3}{5}}$ in $(0, 3)$, e dunque non ci sono punti critici.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = f(S_2) = \log \left(1 + 3^{\frac{4}{5}} \right) , \quad f(S_3) = 0 \, .$$

Dunque il massimo di f è $\log \left(1 + 3^{\frac{4}{5}} \right)$ e il minimo è 0.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_{\Omega} (x + y - 1) \, dx \, dy$$

dove $\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \geq 0 \, , \, x^2 + y^2 \leq 9 \, , \, \frac{x^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{9} \geq 1 \right\}$.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 5.

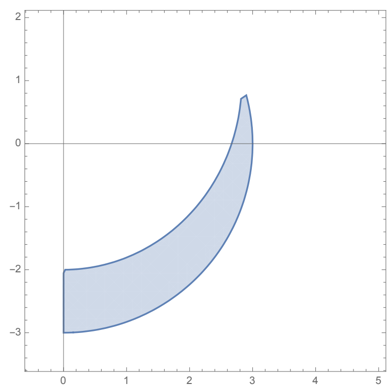

Figure 5: L'insieme Ω.

Scriviamo Ω come insieme semplice rispetto alla x. Troviamo innanzitutto il punto A in Ω di intersezione della circonferenza e dell'ellisse che delimitano l'insieme. Cerchiamo quindi una soluzione del sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \\ \frac{x^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \end{cases}$$

Troviamo $x^2 = 9 - y^2$ dalla seconda, e sostituiamo nella terza. Si ottiene l'equazione

$$y^2 + 16y - 17 = 0$$

che ha soluzioni $y_1 = -17$ e $y_2 = 1$. La soluzione y_1 non è accettabile (troveremmo $x^2 = -280$), e quindi otteniamo che la coordinata y del punto A è $y = 1$.

Possiamo quindi scrivere $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ dove

$$\Omega_1 = \left\{ (x, y) \, : \, -3 \le y \le -2 \, , \, 0 \le x \le \sqrt{9 - y^2} \right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{ (x, y) \, : \, -2 \le y \le 1 \, , \, 2\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{(y-1)^2}{9}} \le x \le \sqrt{9 - y^2} \right\}$$

Dunque

$$\iint_\Omega (x + y - 1) \, dx \, dy = \iint_{\Omega_1} (x + y - 1) \, dx \, dy + \iint_{\Omega_2} (x + y - 1) \, dx \, dy$$

Calcoliamo i due integrali:

$$\iint_{\Omega_1} (x + y - 1) \, dx \, dy = \int_{-3}^{-2} \left(\int_0^{\sqrt{9-y^2}} (x + y - 1) \, dx \right) dy =$$

$$= \int_{-3}^{-2} \left(\frac{1}{2}x^2 + (y-1)x \right) \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{9-y^2}} dy =$$

$$= \int_{-3}^{-2} \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}y^2 + y\sqrt{9 - y^2} - \sqrt{9 - y^2} \right) dy =$$

$$= \left(\frac{9}{2}y - \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{3}(9 - y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{2} \arcsin \frac{y}{3} - \frac{1}{2}y\sqrt{9 - y^2} \right) \Big|_{-3}^{-2};$$

$$\iint_{\Omega_2} (x + y - 1) \, dx \, dy = \int_{-2}^{1} \left(\int_{2\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{(y-1)^2}{9}}}^{\sqrt{9-y^2}} (x + y - 1) \, dx \right) dy =$$

$$= \int_{-2}^{1} \left(\frac{1}{2}x^2 + (y-1)x \right) \Big|_{x=2\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{(y-1)^2}{9}}}^{x=\sqrt{9-y^2}} dy =$$

$$= \int_{-2}^{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^2 + y\sqrt{9 - y^2} - \sqrt{9 - y^2} + \frac{4}{9}(y-1)^2 - 2\sqrt{2}\,(y-1)\sqrt{1 - \frac{(y-1)^2}{9}} \right) dy =$$

$$= \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{3}(9 - y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{2} \arcsin \frac{y}{3} - \frac{1}{2}y\sqrt{9 - y^2} + \frac{4}{27}(y-1)^3 + 6\sqrt{2}\left(1 - \frac{(y-1)^2}{9}\right)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{-2}^{1}.$$

Si ottiene quindi

$$\iint_\Omega (x + y - 1) \, dx \, dy = \frac{16 - \sqrt{2}}{3} - \frac{9}{4}\pi - \frac{9}{2} \arcsin\left(\frac{1}{3}\right).$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + 3y^2 + z^2 = 1 - 2y \right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ *nel punto* $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \, , 0 \, , \, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$*;*

La superficie Σ è scritta come insieme di livello della funzione differenziabile

$$F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 2y$$

che verifica

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 6y + 2 \\ 2z \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \nabla F(P) = \nabla F \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \, , 0 \, , \, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

Quindi P è un punto regolare per Σ, e l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è data da

$$\sqrt{2} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2y + \sqrt{2} \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0 \, .$$

ii) fare un disegno approssimativo di Σ *e scriverne una parametrizzazione globale;*

Scrivendola nella forma

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + z^2 = 1 - 2y - 3y^2 \right\}$$

la superficie si può interpretare come superficie di rotazione, ottenuta facendo ruotare intorno all'asse y il grafico della funzione $g(y) = \sqrt{1 - 2y - 3y^2}$ definita in $[-1, \frac{1}{3}]$, dunque parametrizzandola come superficie di rotazione possiamo scrivere che $\Sigma = \sigma(D)$ dove

$$D = \left\{ (t, \varphi) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \, : \, -1 \leq t \leq \frac{1}{3} \right\}$$

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{con} \qquad \sigma(t, \varphi) = \left(\sqrt{1 - 2t - 3t^2} \, \cos\varphi \, , \, t \, , \, \sqrt{1 - 2t - 3t^2} \, \sin\varphi \right)$$

Il disegno di Σ è in figura 6.

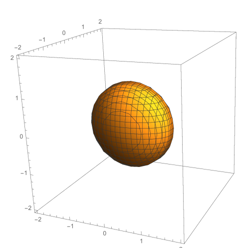

Figure 6: La superficie Σ.