

Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 12-09-2019

- *Svolgere un esercizio per foglio protocollo.*

Esercizio 1. (12 punti) Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu y + 4x \sin x \end{cases}$$

con $x \in [-7, 7]$, $y \in \mathbb{R}$, e $\mu \in (0, 8)$,

- (i) studiare al variare di $\mu \in (0, 8)$ la stabilità dei punti fissi del sistema;
- (ii) disegnare il ritratto di fase del sistema al variare di $\mu \in (0, 8)$.

Esercizio 2. (10 punti) Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 5y \\ \dot{y} = -(2x^2 + x - 3)e^x \end{cases}$$

- (i) dire se si tratta di un sistema hamiltoniano, e in caso affermativo scriverne la Lagrangiana;
- (ii) disegnare il ritratto di fase del sistema;
- (iii) detta $(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))$ la soluzione del sistema con condizione iniziale (x_0, y_0) , trovare il valore \bar{y} per cui la soluzione con condizione iniziale $(0, y_0)$ è illimitata per ogni $y_0 > \bar{y}$.

Esercizio 3. (10 punti) Data la funzione $f_r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definita da

$$f_r(x) = \begin{cases} \frac{(2-r)x}{1-rx}, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-x), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

con $r \in (0, 2)$;

- (i) studiare esistenza e stabilità dei punti fissi al variare di $r \in (0, 2)$;
- (ii) studiare esistenza e stabilità di orbite periodiche al variare di $r \in (0, 2)$.

Svolgimento

Esercizio 1. Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu y + 4x \sin x \end{cases}$$

con $x \in [-7, 7]$, $y \in \mathbb{R}$, e $\mu \in (0, 8)$,

(i) studiare al variare di $\mu \in (0, 8)$ la stabilità dei punti fissi del sistema;

I punti fissi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ \mu y + 4x \sin x = 0 \\ x \in [-7, 7], y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

quindi i punti

$$Q_1 = (-2\pi, 0) \quad Q_2 = (-\pi, 0) \quad Q_3 = (0, 0) \quad Q_4 = (\pi, 0) \quad Q_5 = (2\pi, 0)$$

Per studiarne la stabilità proviamo innanzitutto a studiare la linearizzazione del campo nei punti, e quindi verificare se si tratta di punti iperbolici. La matrice Jacobiana del campo di vettori è data da

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4(\sin x + x \cos x) & \mu \end{pmatrix}$$

e quindi otteniamo:

- $Q_1 = (-2\pi, 0)$. Si trova

$$JF(Q_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8\pi & \mu \end{pmatrix}$$

per cui $\det(JF(Q_1)) = 8\pi$ e $\text{tr}(JF(Q_1)) = \mu$. Gli autovalori della matrice sono quindi

$$\lambda(Q_1)_{\pm} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 32\pi}}{2}$$

Poiché $\mu^2 - 32\pi < 0$ per ogni $\mu \in (0, 8)$, gli autovalori risultano essere complessi coniugati con parte immaginaria non nulla e parte reale uguale a $\frac{\mu}{2}$, quindi positiva. Ne segue che per tutti i valori di $\mu \in (0, 8)$ il punto è iperbolico, ed è instabile di tipo fuoco.

- $Q_2 = (-\pi, 0)$. Si trova

$$JF(Q_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4\pi & \mu \end{pmatrix}$$

per cui $\det(JF(Q_2)) = -4\pi$ e $\text{tr}(JF(Q_2)) = \mu$. Poiché il determinante è sempre negativo, il punto è iperbolico, ed è instabile di tipo sella.

- $Q_3 = (0, 0)$. Si trova

$$JF(Q_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

per cui $\det(JF(Q_3)) = 0$ e $\text{tr}(JF(Q_3)) = \mu$. Poiché il determinante è nullo il punto non è iperbolico, dunque la sua stabilità va studiata con tecniche non lineari, non essendo verificate le ipotesi del Teorema di Hartman-Grobman. Riprendiamo lo studio di questo punto più sotto.

- $Q_4 = (\pi, 0)$. Si trova

$$JF(Q_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4\pi & \mu \end{pmatrix}$$

per cui $\det(JF(Q_4)) = 4\pi$ e $\text{tr}(JF(Q_4)) = \mu$. Gli autovalori della matrice sono quindi

$$\lambda(Q_4)_{\pm} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 16\pi}}{2}$$

Per valori $\mu \in (0, 8)$ troviamo che

$$\mu^2 - 16\pi \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu \in [4\sqrt{\pi}, 8)$$

quindi dobbiamo considerare due casi.

Se $\mu \in (0, 4\sqrt{\pi})$, gli autovalori risultano essere complessi coniugati con parte immaginaria non nulla e parte reale uguale a $\frac{\mu}{2}$, quindi positiva. Ne segue che per questi valori di μ il punto è iperbolico, ed è instabile di tipo fuoco.

Se $\mu \in [4\sqrt{\pi}, 8)$, gli autovalori sono reali positivi (coincidenti per $\mu = 4\sqrt{\pi}$). Il punto è quindi iperbolico, ed è instabile di tipo nodo.

- $Q_5 = (2\pi, 0)$. Si trova

$$JF(Q_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8\pi & \mu \end{pmatrix}$$

per cui $\det(JF(Q_5)) = -8\pi$ e $\text{tr}(JF(Q_5)) = \mu$. Poiché il determinante è sempre negativo, il punto è iperbolico, ed è instabile di tipo sella.

Rimane da studiare la stabilità del punto fisso non iperbolico $Q_3 = (0, 0)$. Dallo studio lineare si deduce che esiste un autovalore di $JF(Q_3)$ positivo per ogni valore di $\mu \in (0, 8)$, e questo fa supporre che il punto sia instabile. Per verificarlo possiamo ad esempio studiare il segno del campo in un intorno del punto. Consideriamo in particolare l'insieme

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, 0 \leq x \leq \pi\}$$

In U le due componenti del campo sono positive, quindi preso $(x_0, y_0) \in U$ la sua orbita deve necessariamente raggiungere la regione $\{x \geq \pi\}$. Questo è sufficiente a mostrare che il punto Q_3 non può essere stabile.

(ii) disegnare il ritratto di fase del sistema al variare di $\mu \in (0, 8)$.

Per disegnare il ritratto di fase utilizziamo innanzitutto le informazioni sui punti fissi. In particolare dobbiamo distinguere i due casi $\mu \in (0, 4\sqrt{\pi})$ e $\mu \in [4\sqrt{\pi}, 8)$, perché cambia il tipo di comportamento intorno al punto Q_4 .

Le altre informazioni che possiamo usare sono:

- si verifica facilmente che non esistono rette invarianti;
- poiché $\operatorname{div}(F)(x, y) = \mu > 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, per il criterio di Bendixson non esistono orbite periodiche;
- lo studio del segno del campo (facile nella prima componente, qualche facile informazione ricavabile anche per la seconda componente).

In conclusione ritroviamo i ritratti di fase di figura 1a e di figura 1b.

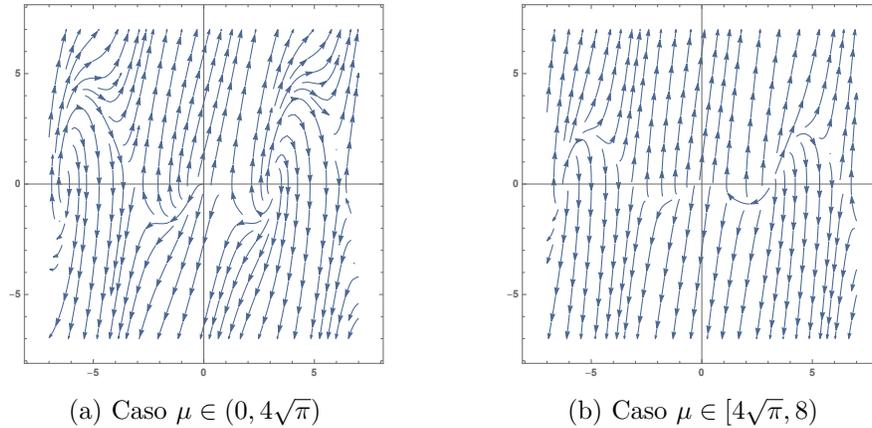


Figure 1

Esercizio 2. Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 5y \\ \dot{y} = -(2x^2 + x - 3)e^x \end{cases}$$

(i) dire se si tratta di un sistema hamiltoniano, e in caso affermativo scriverne la Lagrangiana;

Il sistema è hamiltoniano se esiste una funzione differenziabile $H(x, y)$ tale che

$$\begin{cases} \dot{x} = 5y = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = -(2x^2 + x - 3)e^x = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

Ponendo

$$H(x, y) = \frac{5}{2}y^2 + \int (2x^2 + x - 3)e^x dx = \frac{5}{2}y^2 + x(2x - 3)e^x$$

otteniamo una soluzione. Quindi il sistema è hamiltoniano, e possiamo dire che è un sistema di tipo meccanico.

Per scrivere la Lagrangiana associata dobbiamo calcolare la trasformata di Legendre della funzione H nella variabile y , quindi

$$L(x, \dot{x}) = \left(\dot{x} y - H(x, y) \right) \Big|_{\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}} = \left(\dot{x} y - H(x, y) \right) \Big|_{y = \frac{1}{5} \dot{x}} = \frac{1}{10} \dot{x}^2 - x(2x - 3) e^x$$

(ii) disegnare il ritratto di fase del sistema;

Per un sistema hamiltoniano di tipo meccanico studiamo innanzitutto l'energia potenziale $V(x) = x(2x - 3) e^x$. I punti critici di $V(x)$ corrispondono ai punti fissi del sistema, e la tipologia del punto critico implica la stabilità del punto fisso corrispondente.

I punti critici di $V(x)$ sono i punti $x_1 = -\frac{3}{2}$, punto di massimo locale, e $x_2 = 1$, punto di minimo locale. Quindi troviamo per il sistema i punti fissi $Q_1 = (-\frac{3}{2}, 0)$, che è un punto di tipo sella, e $Q_2 = (1, 0)$, che è un centro.

Dal grafico di $V(x)$ in figura 2a, si ricava quindi il ritratto di fase di figura 2b. Non visibile in

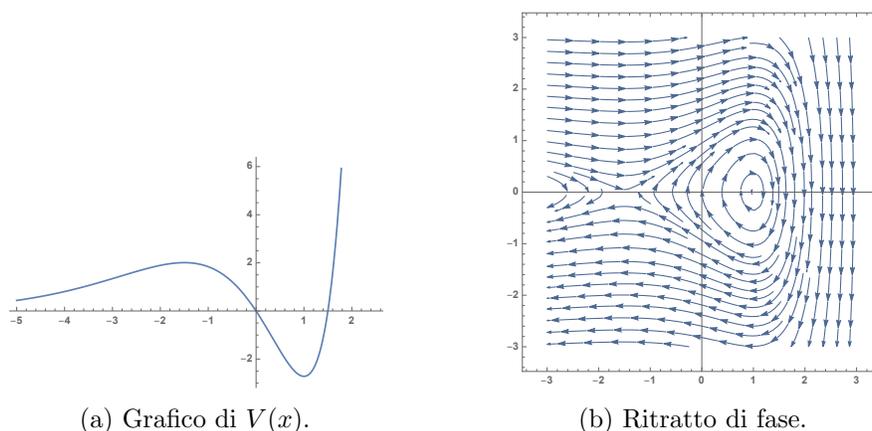


Figure 2

figura, osserviamo che per $x \rightarrow -\infty$ le orbite sono limitate nella variabile y .

(iii) detta $(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))$ la soluzione del sistema con condizione iniziale (x_0, y_0) , trovare il valore \bar{y} per cui la soluzione con condizione iniziale $(0, y_0)$ è illimitata per ogni $y_0 > \bar{y}$.

Come si osserva dal ritratto di fase, le soluzioni con condizione iniziale della forma $(0, y_0)$ sono limitate se sono interne all'orbita omoclina del punto di sella Q_1 , o coincidono con quest'orbita omoclina. Mentre le soluzioni sono illimitate nella variabile x , se sono esterne all'orbita omoclina.

Il valore \bar{y} che cerchiamo è quindi l'intersezione dell'orbita omoclina di Q_1 con il semi-asse positivo delle ordinate. Poiché l'orbita omoclina è parte della curva di livello della funzione $H(x, y)$ passante per Q_1 , l'orbita omoclina è l'insieme

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{5}{2} y^2 + x(2x - 3) e^x = H(Q_1) = 9 e^{-\frac{3}{2}}, x > -\frac{3}{2} \right\}$$

e quindi \bar{y} è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} \frac{5}{2}y^2 + x(2x-3)e^x = 9e^{-\frac{3}{2}} \\ x = 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

quindi $\bar{y} = \sqrt{\frac{18}{5}} e^{-\frac{3}{2}}$.

Esercizio 3. Data la funzione $f_r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definita da

$$f_r(x) = \begin{cases} \frac{(2-r)x}{1-rx}, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-x), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

con $r \in (0, 2)$;

(i) studiare esistenza e stabilità dei punti fissi al variare di $r \in (0, 2)$;

I punti fissi sono soluzioni dell'equazione $f_r(x) = x$, e sono intersezioni tra il grafico di f_r e la bisettrice del primo quadrante.

Per $x \in [0, \frac{1}{2}]$ si ha che $f_r(x) = x$ se e solo se

$$\frac{(2-r)x}{1-rx} = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ oppure } x = \frac{r-1}{r}$$

Poiché per valori di $r \in (0, 2)$ si ha che $\frac{r-1}{r} \in (0, \frac{1}{2}]$ se e solo se $r \in (1, 2)$, abbiamo due casi: se $r \in (0, 1]$ esiste in $[0, \frac{1}{2}]$ un unico punto fisso dato da $P_1 = 0$; se $r \in (1, 2)$ esistono in $[0, \frac{1}{2}]$ due punti fissi dati da $P_1 = 0$ e $P_2 = \frac{r-1}{r}$.

Per $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ si ha che $f_r(x) = x$ se e solo se $2(1-x) = x$, e quindi si trova sempre il punto fisso $P_3 = \frac{2}{3}$.

I diversi casi che abbiamo trovato si vedono bene disegnando il grafico di f_r .

Per la stabilità dei punti fissi calcoliamo innanzitutto la derivata di f_r nei punti. Distinguiamo tre casi.

- $r \in (0, 1)$. In questo caso, esistono solo due punti fissi, $P_1 = 0$ e $P_3 = \frac{2}{3}$ e troviamo

$$f'_r(P_1) = 2 - r \in (1, 2) \quad \text{e} \quad f'_r(P_3) = 2$$

Quindi entrambi i punti sono iperbolici e risultano instabili.

- $r = 1$. In questo caso abbiamo ancora solo i due punti fissi $P_1 = 0$ e $P_3 = \frac{2}{3}$, ma

$$f'_1(P_1) = 1 \quad \text{e} \quad f'_1(P_3) = 2$$

Quindi P_3 è iperbolico e instabile, mentre P_1 non è iperbolico. Tuttavia, osservando il grafico di f_1 o calcolando $f''_1(P_1) = 2$, otteniamo che P_1 è instabile.

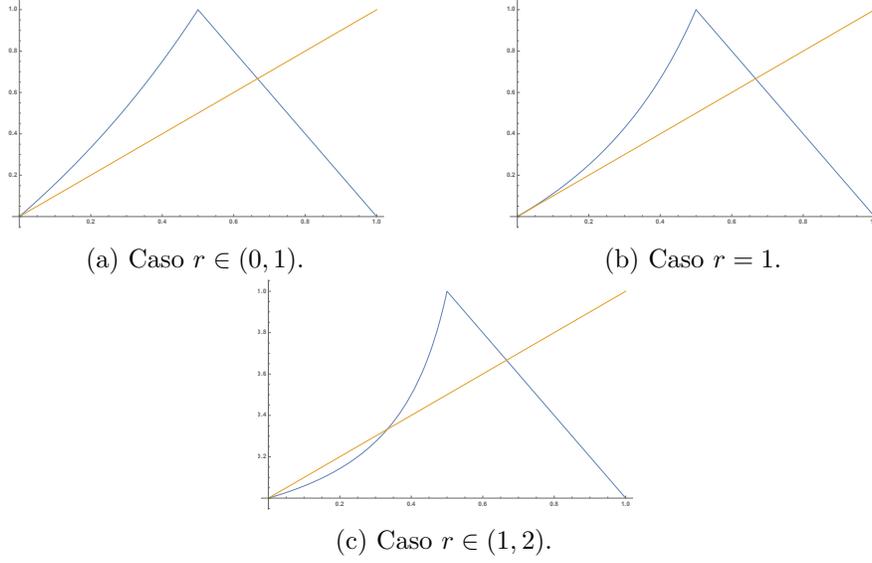


Figure 3

- $r \in (1, 2)$. In questo caso abbiamo tre punti fissi, $P_1 = 0$, $P_2 = \frac{r-1}{r}$ e $P_3 = \frac{2}{3}$. Troviamo

$$f'_r(P_1) = 2 - r \in (0, 1), \quad f'_r(P_2) = \frac{1}{2-r} \in (1, +\infty) \quad \text{e} \quad f'_r(P_3) = 2$$

Quindi tutti i punti sono iperbolici, e P_1 è attrattivo, mentre P_2 e P_3 sono instabili.

(ii) studiare esistenza e stabilità di orbite periodiche al variare di $r \in (0, 2)$.

Per studiare l'esistenza di orbite periodiche possiamo applicare il Teorema di Sharkovskii, essendo la funzione f_r continua. Considerando la partizione $J_0 = (0, \frac{1}{2})$ e $J_1 = (\frac{1}{2}, 1)$, e costruendo l' f -grafo associato (J_0 ricopre sé stesso e J_1 , e J_1 ricopre sé stesso e J_0), si ricava l'esistenza di un'orbita periodica di periodo minimo 3. Quindi esistono orbite periodiche di ogni periodo.

L'esistenza di orbite periodiche di ogni periodo si può mostrare anche considerando il grafico delle iterate f_r^n , da cui si vede che per ogni n si generano nuovi punti fissi.

Per quanto riguarda la stabilità di queste orbite osserviamo che se $r \in (0, 1]$, la derivata di f_r verifica $|f'_r(x)| > 1$ per ogni $x \neq 0, \frac{1}{2}$. Quindi dato un punto periodico x_p di periodo minimo $p > 1$, si trova

$$|(f_r^p)'(x_p)| = \prod_{k=0}^{p-1} |f'_r(f^k(x_p))| > 1$$

e quindi l'orbita periodica di x_p è iperbolica e instabile.

Nel caso $r \in (1, 2)$ possiamo concludere nello stesso modo, osservando che ogni orbita periodica deve essere necessariamente esterna all'intervallo $(0, P_2)$ (infatti i punti di questo intervallo hanno orbite asintotiche a P_1), e si verifica che $|f'_r(x)| > 1$ per ogni $x \in (P_2, 1)$ diverso da $\frac{1}{2}$.