Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 11-09-2018

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \log\Big(1 + x^2(x^2-1)^2 + y^2\Big)$$

i) trovare tutti i punti critici, e determinare quali di questi sono punti di minimo assoluto;

ii) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^4+y^2}$$

iii) determinare massimo e minimo di f su

$$\bar{\Omega} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, x^2+y^2 \leq 4\Big\}$$

Esercizio 2. (8 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + \log(y) + z^2 = 1\Big\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (0\,,\,1\,,\,1)$;

ii) fare un disegno approssimativo di Σ e scriverne una parametrizzazione globale.

Esercizio 3. (10 punti) Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \log(x+y) + xy \\ \log(x+y) + x^2 \end{pmatrix}$$

i) studiare le proprietà del campo sul suo dominio naturale;

ii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva (γ, I), con $I = [-1,1]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(4 + \cos(\pi t)\,,\, 2\,\sin(\pi t)\Big)$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \log\Big(1 + x^2(x^2-1)^2 + y^2\Big)$$

i) trovare tutti i punti critici, e determinare quali di questi sono punti di minimo assoluto;

La funzione si scrive come la composizione di $g(t) = \log t$ e del polinomio $h(x,y) = 1 + x^2(x^2 - 1)^2 + y^2$, che verifica $h(x,y) \geq 1$ su tutto $\mathbb{R}^2$, Dunque il dominio naturale di f è tutto $\mathbb{R}^2$, e nel suo dominio è anche differenziabile. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} \frac{2x(x^2-1)(3x^2-1)}{1+x^2(x^2-1)^2+y^2} = 0 \\ \frac{2y}{1+x^2(x^2-1)^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

La prima equazione ha soluzioni $x = 0, \pm 1$ e $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. La seconda equazione ha soluzione $y = 0$. Dunque i punti critici risultano essere

$$C_1 = (0,0) \qquad C_2 = (1\,,\,0) \qquad C_3 = (-1\,,\,0) \qquad C_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\,0\right) \qquad C_5 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\,0\right)$$

Ricordando che il minimo assoluto del polinomio h su $\mathbb{R}^2$ è 1, vale $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Inoltre nei punti critici C_1, C_2 e C_3 la funzione vale proprio 0, e questi sono quindi i punti di minimo assoluto.

ii) dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^4+y^2}$$

La funzione $\frac{f(x,y)}{x^4+y^2}$ è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dunque $(0,0)$ è un punto di accumulazione del dominio e il limite ha senso. Verifichiamo innanzitutto il comportamento lungo gli assi. Si trova lungo l'asse x

$$\lim_{y=0,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2(x^2-1)^2)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^2-1)^2}{x^4} = +\infty$$

e lungo l'asse y

$$\lim_{x=0,\,(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^4+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y^2)}{y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1$$

Dunque il limite non esiste.

iii) determinare massimo e minimo di f su

$$\bar{\Omega} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, x^2+y^2 \leq 4\Big\}$$

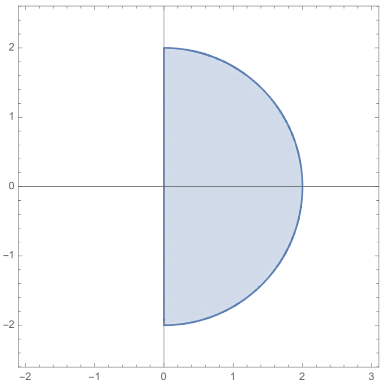

Figure 1: L'insieme $\bar{\Omega}$.

L'insieme $\bar{\Omega}$ è il semicerchio rappresentato in figura 1. Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi nella parte interna Ω , sui punti critici vincolati al bordo $\partial\bar{\Omega}$ e sugli eventuali spigoli del bordo.

Abbiamo visto che f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$. I punti critici liberi sono cinque, ma solo $C_2 = (1, 0)$ e $C_4 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ sono in Ω.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo $\partial\bar{\Omega}$. Il bordo si scrive come unione dei due insiemi

$$\Gamma_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = 0\,,\, -2 \le y \le 2\right\} \quad \text{e} \quad \Gamma_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 4\,,\, x \ge 0\right\}$$

e quindi troviamo gli spigoli

$$S_1 = (0, -2) \qquad S_2 = (0, 2)$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (0\,,\, t)\,, \qquad t \in [-2\,,\, 2]\,,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \log(1 + t^2)\,, \qquad t \in [-2\,,\, 2]\,.$$

Risulta $g_1'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$, dunque si trova un punto critico per $t = 0$, per cui troviamo il punto critico vincolato

$$Q_1 = (0, 0)$$

che corrisponde al punto critico libero C_1.

Per quanto riguarda Γ_2 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = \left(\sqrt{4 - t^2}\,,\, t\right), \qquad t \in [-2\,,\, 2]\,,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = \log(37 - 32t^2 + 10t^4 - t^6)\,, \qquad t \in [-2\,,\, 2]\,.$$

Risulta $g_2'(t) = -\frac{2t(t^2-4)(3t^2-8)}{37-32t^2+10t^4-t^6}$, dunque in $(-2,2)$ troviamo punti critici per $t = 0, \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$, per cui troviamo i punti critici vincolati

$$Q_2 = (2,0) \qquad Q_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,,\,\sqrt{\frac{8}{3}}\right) \qquad Q_4 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,,\,-\sqrt{\frac{8}{3}}\right)$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C_2) = 0\,, \quad f(C_4) = \log\frac{31}{27}\,, \quad f(S_1) = f(S_2) = \log 5\,, \quad f(Q_1) = 0\,, \quad f(Q_2) = \log 37$$

$$f(Q_3) = f(Q_4) = \log\frac{103}{27}$$

Dunque il massimo di f è $\log 37$ e il minimo è 0.

Esercizio 2. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + \log(y) + z^2 = 1\right\}$$

i) scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $P = (0\,,\,1\,,\,1)$;

La superficie Σ è scritta come insieme di livello della funzione differenziabile

$$F(x,y,z) = x^2 + \log(y) + z^2$$

che verifica

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{1}{y} \\ 2z \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \nabla F(P) = \nabla F\,(0\,,\,1\,,\,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

Quindi P è un punto regolare per Σ, e l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ in P è data da

$$(y-1) + 2\,(z-1) = 0\,.$$

ii) fare un disegno approssimativo di Σ e scriverne una parametrizzazione globale;

Scrivendola nella forma

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + z^2 = 1 - \log(y)\right\}$$

la superficie si può interpretare come superficie di rotazione, ottenuta facendo ruotare intorno all'asse y il grafico della funzione $g(y) = \sqrt{1-\log(y)}$. Osserviamo che la funzione $g(y)$ è definita in $(0,e]$, dunque parametrizzandola come superficie di rotazione possiamo scrivere che $\Sigma = \sigma(D)$ dove

$$D = \{(t,\varphi) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi] \,:\, 0 < t \leq e\}$$

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{con} \qquad \sigma(t,\varphi) = \left(\sqrt{1-\log(t)}\;\cos\varphi\,,\,t\,,\,\sqrt{1-\log(t)}\;\sin\varphi\right)$$

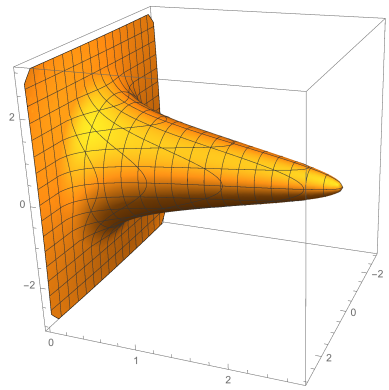

Figure 2: La superficie Σ.

Il disegno di Σ è in figura 2.

Esercizio 3. *Dato il campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \log(x+y) + xy \\ \log(x+y) + x^2 \end{pmatrix}$$

i) studiare le proprietà del campo sul suo dominio naturale;

Entrambe le componenti del campo hanno come dominio naturale l'insieme

$$X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x+y > 0\big\}$$

che è quindi il dominio naturale di $\mathbf{F}$, e su X il campo risulta essere differenziabile. Per studiare le proprietà del campo su X, iniziamo a calcolare il rotore. Si ha

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)$$

Calcoliamo separatamente le due derivate.

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x+y} + 2x$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x+y} + x$$

Quindi $\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = x$, e il campo $\mathbf{F}$ non è irrotazionale. Di conseguenza non può essere conservativo.

ii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ *lungo la curva* (γ, I)*, con* $I = [-1,1]$ *e parametrizzazione*

$$\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(4 + \cos(\pi t)\,,\, 2\,\sin(\pi t)\Big)$$

La parametrizzazione γ è una funzione differenziabile con immagine interamente contenuta nel dominio naturale X del campo, infatti certamente $4+\cos(\pi t)+2\sin(\pi t)\geq 1$ per ogni $t\in\mathbb{R}$. Restringendoci all'intervallo I, la curva risulta essere semplice e chiusa, e il suo sostegno Γ è l'ellisse di centro $O=(4,0)$ e semiassi $a=1$ e $b=2$ in figura 3, che ha quindi equazione

$$\Gamma=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,(x-4)^2+\frac{y^2}{4}=1\right\}$$

Per calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo (γ,I) possiamo allora usare il Teorema del Rotore, essendo

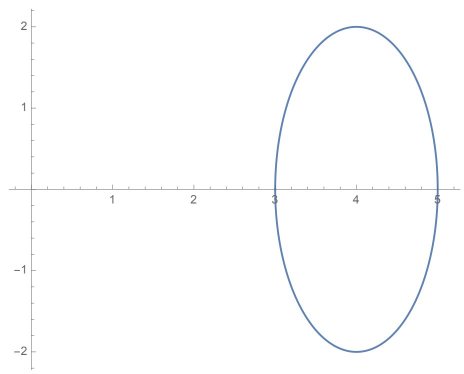

Figure 3: Il sostegno della curva (γ,I).

U, la parte racchiusa dalla curva, contenuta in X. Osserviamo inoltre che la curva orientata positivamente, quindi

$$L(\mathbf{F},\gamma)=\iint_U \mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y)\,dxdy$$

e scriviamo U come insieme semplice nella forma

$$U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,3\leq x\leq 5\,,\,-2\sqrt{1-(x-4)^2}\leq y\leq 2\sqrt{1-(x-4)^2}\right\}$$

Quindi

$$L(\mathbf{F},\gamma)=\iint_U \mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y)\,dxdy=\iint_U x\,dxdy=$$

$$=\int_3^5\left(\int_{-2\sqrt{1-(x-4)^2}}^{2\sqrt{1-(x-4)^2}} x\,dy\right)dx=4\int_3^5 x\sqrt{1-(x-4)^2}\,dx=$$

$$=4\int_3^5 (x-4)\sqrt{1-(x-4)^2}\,dx+16\int_3^5 \sqrt{1-(x-4)^2}\,dx=-\frac{4}{3}\left(1-(x-4)^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_3^5+16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 z\,dz=8\pi$$