Algebra Lineare
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 11-02-2012

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche il testo del compito e i fogli di brutta.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (6 punti) Trovare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} z^5 - 243 = 0 \\ |z| \geq |z - 3 - 3i| \end{cases}$$

Esercizio 2. (10 punti) (i) Scrivere l'equazione cartesiana della retta $r \subset \mathbb{R}^3$ passante per il punto

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e supplementare in $\mathbb{R}^3$ al piano $\pi = \{x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$;

(ii) determinare se esiste un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(L_A) = \pi$ e $\mathrm{Im}(L_A) = r$ e, in caso affermativo, scrivere la matrice A associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. (6 punti) Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione dell'intersezione tra i piani di $\mathbb{R}^3$

$$\pi_1 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \qquad \pi_2 = \left\{2kx_1 - 2x_2 - (k+1)x_3 = 2(k-1)^2\right\}$$

(non va trovata esplicitamente l'intersezione)

Esercizio 4. (12 punti) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) verificare che siano entrambe diagonalizzabili e trovare le basi di autovettori;

(ii) dire, usando gli autovettori trovati al punto (i) e senza calcolare esplicitamente la matrice, se $C = AB - BA$ è iniettiva;

(iii) determinare, con qualche calcolo in più ma senza calcolare esplicitamente la matrice, il rango di C.

Svolgimento

- **Esercizio 1** *Trovare le soluzioni complesse del sistema*

$$\begin{cases} z^5 - 243 = 0 \\ |z| \geq |z - 3 - 3i| \end{cases}$$

Le soluzioni della prima equazione sono le radici quinte di 243, quindi

$$z \in \left\{ 3\, e^{i\,\frac{2\pi}{5}k} \;:\; k = 0,1,2,3,4 \right\}$$

La seconda condizione del sistema si traduce nella condizione

$$d(z,0) \geq d(z, 3+3i) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \geq 3$$

Quindi le soluzioni del sistema sono

$$z_1 = 3 \qquad \text{e} \qquad z_2 = 3\, e^{i\,\frac{2\pi}{5}}$$

- **Esercizio 2** *(i) Scrivere l'equazione cartesiana della retta $r \subset \mathbb{R}^3$ passante per il punto*

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e supplementare in $\mathbb{R}^3$ al piano $\pi = \{x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$;

Troviamo innanzitutto una base di π, ad esempio

$$\pi = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Una retta r supplementare a π deve essere tale che $r = \mathrm{Span}(v)$ con v linearmente indipendente dalla base di π. Se inoltre $P \in r$ allora si deve avere $\vec{OP} = \lambda v$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Dobbiamo quindi trovare una soluzione di

$$v \notin \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{e} \quad v = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $P \notin \pi$, ponendo $v = \vec{OP}$ si ha una soluzione. Infatti

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6 \neq 0$$

Poniamo quindi

$$r = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

e l'equazione cartesiana si trova riducendo a scala la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & x_1 \\ -1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_3 \\ 0 & x_2 + x_3 \\ 0 & x_1 \end{array} \right)$$

da cui si ottiene che

$$r = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(ii) determinare se esiste un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tale che* $\ker(L_A) = \pi$ *e* $Im(L_A) = r$ *e, in caso affermativo, scrivere la matrice* A *associata rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$*.*

Il Teorema della Dimensione implica che deve essere verificata la condizione

$$\dim(\ker(L_A)) + \dim(\mathrm{Im}(L_A)) = 3$$

quindi le condizioni imposte a L_A non contraddicono il teorema. Per trovare esplicitamente una tale applicazione lineare, usiamo come base di $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per soddisfare le richieste possiamo definire

$$L_A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con questa scelta la matrice A, rispetto alla base canonica, è data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

dove abbiamo usato

$$e_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$e_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ed} \quad e_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **<u>Esercizio 3</u>** *Studiare al variare di* $k \in \mathbb{R}$ *la dimensione dell'intersezione tra i piani di* $\mathbb{R}^3$

$$\pi_1 = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \qquad \pi_2 = \left\{ 2kx_1 - 2x_2 - (k+1)x_3 = 2(k-1)^2 \right\}$$

(non va trovata esplicitamente l'intersezione)

Troviamo innanzitutto l'equazione cartesiana del piano π_1. Dobbiamo ridurre a scala la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 2 & x_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 + x_2 - x_1 \end{array} \right)$$

da cui si ottiene che
$$\pi_1 = \{x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$$
Dobbiamo ora studiare la dimensione delle soluzioni del sistema
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2kx_1 - 2x_2 - (k+1)x_3 = 2(k-1)^2 \end{cases}$$
al variare di $k \in \mathbb{R}$. Indichiamo con $\mathcal{S}_k$ lo spazio delle soluzioni al variare di k. Scriviamo la matrice completa
$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2k & -2 & -(k+1) & 2(k-1)^2 \end{array}\right)$$
Per $k = 0$ è già ridotta a scala e soddisfa la condizione di compatibilità. Quindi il sistema ha soluzioni e
$$\dim \mathcal{S}_0 = 3 - \text{rango}(A) = 3 - 2 = 1$$
Per $k \neq 0$, riduciamo la matrice a scala, e troviamo
$$A' \sim S' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2k & -2 & -(k+1) & 2(k-1)^2 \\ 0 & 2(k-1) & k-1 & 2(k-1)^2 \end{array}\right)$$
da cui si ottiene che per $k \notin \{0,1\}$ il sistema è compatibile e
$$\dim \mathcal{S}_k = 3 - \text{rango}(A) = 3 - 2 = 1$$
Per $k = 1$, la seconda riga di S' è tutta nulla, quindi il sistema è ancora compatibile, ma
$$\dim \mathcal{S}_1 = 3 - \text{rango}(A) = 3 - 1 = 2$$

- **Esercizio 4** *Date le matrici*
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
(i) verificare che siano entrambe diagonalizzabili e trovare le basi di autovettori;

Iniziamo con A. Dobbiamo cercare gli autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Scriviamo il polinomio caratteristico di A
$$p_A(t) = \det(A - tI) = -(t^3 - 6t^2 + 11t - 6) = -(t-1)(t-2)(t-3)$$
Quindi troviamo che gli autovalori sono $\{1,2,3\}$ con molteplicità algebriche $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. Poiché in generale, per un autovalore λ vale $1 \leq g_\lambda \leq m_\lambda$, ricaviamo che $g_1 = g_2 = g_3 = 1$ e la matrice A è diagonalizzabile (ogni matrice triangolabile con autovalori distinti è diagonalizzabile).

La base $\mathcal{C}_A$ che rende A diagonale avrà un autovettore relativo all'autovalore 1, dato da
$$(A - I)v = 0 \quad \Longrightarrow \quad v \in \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$
un autovettore relativo all'autovalore 2, dato da
$$(A - 2I)v = 0 \quad \Longrightarrow \quad v \in \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

e un autovettore relativo all'autovalore 3, dato da

$$(A-3I)v=0 \quad \Longrightarrow \quad v \in \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Quindi

$$\mathcal{C}_A=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Passiamo ora a B. Scriviamo il polinomio caratteristico di B

$$p_B(t)=\det(B-tI)=-(t^3-5t^2+8t-4)=-(t-1)(t-2)^2$$

Quindi troviamo che gli autovalori sono $\{1,2\}$ con molteplicità algebriche $m_1=1$ e $m_2=2$. Per l'autovalore 1, ricaviamo come prima $g_1=m_1=1$. Per l'autovalore 2, cerchiamo la molteplicità geometrica scrivendo

$$g_2=\dim\ker(B-2I)=\dim\ker\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=2$$

Quindi $g_2=m_2=2$. Ne risulta che B è diagonalizzabile.

La base $\mathcal{C}_B$ che rende B diagonale avrà un autovettore relativo all'autovalore 1, dato da

$$(B-I)v=0 \quad \Longrightarrow \quad v \in \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

e due autovettori relativi all'autovalore 2, dati da

$$(B-2I)v=0 \quad \Longrightarrow \quad v \in \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

Quindi

$$\mathcal{C}_B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

(ii) dire, usando gli autovettori trovati al punto (i) e senza calcolare esplicitamente la matrice, se $C=AB-BA$ è iniettiva;

Dobbiamo stabilire se $\ker(C)$ contiene un vettore non nullo. Usando le notazioni $\mathcal{C}_A=\{v_1,v_2,v_3\}$ e $\mathcal{C}_B=\{w_1,w_2,w_3\}$ per le basi di autovettori trovate al punto (i), notiamo che $v_1=w_1$ e $v_2=w_2$. Quindi

$$C(v_1)=A(B(v_1))-B(A(v_1))=A(v_1)-B(v_1)=v_1-v_1=0$$

dove abbiamo usato che $v_1=w_1$ è autovettore sia di A che di B con autovalore 1. Quindi

$$v_1\in\ker(C)$$

Allo stesso modo si trova che

$$C(v_2)=A(B(v_2))-B(A(v_2))=A(2v_2)-B(2v_2)=4v_2-4v_2=0$$

dove abbiamo usato che $v_2 = w_2$ è autovettore sia di A che di B con autovalore 2. Quindi

$$v_2 \in \ker(C)$$

Quindi il $\ker(C)$ contiene almeno un vettore non nullo, e quindi C non è iniettiva.

(iii) determinare, con qualche calcolo in più ma senza calcolare esplicitamente la matrice, il rango di C.

Al punto (ii) abbiamo determinato che $\mathrm{Span}(v_1, v_2) \subseteq \ker(C)$, quindi essendo v_1 e v_2 linearmente indipendenti, si ha

$$\dim(\ker(C)) \geq 2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{rango}(C) = 3 - \dim(\ker(C)) \leq 1$$

Si tratta quindi di determinare se esiste un vettore v tale che $C(v) \neq 0$. Usiamo il terzo vettore v_3 di $\mathcal{C}_A$ che è linearmente indipendente da v_1 e v_2. Calcoliamo

$$C(v_3) = A(B(v_3)) - B(A(v_3)) = A(B(v_3)) - B(3v_3) = A(B(v_3)) - 3B(v_3)$$

e questo può essere nullo se e solo se $B(v_3)$ è autovettore di A con autovalore 3. Quindi essendo l'autospazio di A relativo all'autovalore 3 di dimensione 1 e generato da v_3, si ha che $C(v_3) = 0$ se e solo se $B(v_3) = \lambda v_3$, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, ossia, facendo i conti, se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che chiaramente non ha soluzioni. Quindi $C(v_3) \neq 0$ e $\mathrm{rango}(C) = 1$.