Elementi di Matematica e Statistica
Corso di Laurea in Tecniche per le Costruzioni Civili e la Gestione del Territorio
Compito del 9-1-2025

Esercizio 1. Determinare il dominio naturale D della funzione

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{x+1}{6-x}}$$

e dire come si comporta la funzione agli estremi di D.

Esercizio 2. Trovare gli eventuali asintoti orizzontali o obliqui a $\pm\infty$ ed eventuali asintoti verticali per la funzione

$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^3+1}$$

Esercizio 3. Determinare l'insieme C dei punti nel quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \sin x\,, & \text{se } x \neq 0; \\ 0\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

è continua, e classificare le eventuali discontinuità.

Esercizio 4. Risolvere con il metodo grafico la disequazione

$$x + \log(x+1) \geq -2x$$

Esercizio 5. Si lanci due volte un dado onesto a sei facce con numeri da 1 a 6, e si consideri la variabile aleatoria X che sia la somma di +1 per ogni numero pari uscito e di -1 per ogni numero dispari uscito.
Si calcoli la legge di X, la sua media e la sua varianza.

Esercizio 6. Dire qual è il segno della permutazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 1 & 7 & 8 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

usando i tre metodi: (a) incroci, (b) formula a base di sommatoria svolta a lezione, (c) dal numero di scambi. Mostrare il conto nei tre casi.

Esercizio 7. Trovare l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

usando l'eliminazione di Gauss.

Esercizio 8. Risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

usando il metodo di Cramer. Calcolare la matrice dei complementi algebrici della matrice dei coefficienti.

ES. 1

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{x+1}{6-x}}$$

Il dominio naturale di f è dato da

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ 6-x \neq 0 , \ \frac{x+1}{6-x} \geq 0 \right\}$$

Poiché $x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$, e $6-x > 0 \iff x < 6$, si trova

$$D = [-1, 6)$$

Gli estremi di D sono dunque -1 e 6. Poiché $-1 \in D$ si può valutare $f(-1) = 0$, mentre $6 \notin D$ quindi calcoliamo

$$\lim_{x \to 6^-} f(x) = \lim_{x \to 6^-} \sqrt[4]{\frac{x+1}{6-x}} = \sqrt[4]{\frac{7}{0^+}} = +\infty$$

ES. 2

$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^3+1}$$

Il dominio naturale di f è $D = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x^3+1 \neq 0 \} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
quindi f può avere un asintoto verticale in -1.
Calcoliamo

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^4+1}{x^3+1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^4+1}{x^3+1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

quindi f ha un asintoto verticale in -1.

Passiamo agli asintoti a $\pm\infty$. Per quanto riguarda $+\infty$, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4+1}{x^3+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{x^3} \, \frac{1+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \frac{1}{1} = +\infty$$

quindi f non ha un asintoto orizzontale a $+\infty$. Vediamo se ha un asintoto obliquo. Calcoliamo

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4+1}{x(x^3+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4+1}{x^4+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{x^4} \, \frac{1+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - ax\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^4+1}{x^3+1} - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+1-x^4-x}{x^3+1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{x^3+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^3}\,\frac{-1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\,\frac{-1}{1} = 0$$

Quindi f ha asintoto obliquo a $+\infty$ dato da $y = x$.

Per quanto riguarda $-\infty$, operiamo analogamente.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+1}{x^3+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{x^3}\,\frac{1+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} x\cdot\frac{1}{1} = -\infty$$

e quindi f non ha un asintoto orizzontale a $-\infty$. Calcoliamo

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+1}{x(x^3+1)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+1}{x^4+x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{x^4}\,\frac{1+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1\cdot\frac{1}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - ax\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^4+1}{x^3+1} - x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+1-x^4-x}{x^3+1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{x^3+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^3}\,\frac{-1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}\,\frac{-1}{1} = 0$$

Quindi f ha asintoto obliquo a $-\infty$ dato da $y = x$.

ES. 3

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x}\sin x, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Il dominio naturale di f è $D = \mathbb{R}$. Inoltre su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, f si scrive come prodotto e composizione di funzioni continue, quindi f è continua certamente in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Resta da valutare come si comporta in 0. Affinché f sia continua in 0 deve verificarsi $\lim_{x\to0} f(x) = f(0) = 0$. Calcoliamo

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}}\sin x = \lim_{x\to0^+}\frac{e^{1/x}}{1/x}\cdot\frac{\sin x}{x} = \left(\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to0^+}\frac{e^{1/x}}{1/x}\right)$$

$$\overset{t=1/x}{=} 1\cdot\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t} = 1\cdot(+\infty) = +\infty$$

Quindi certamente f non è continua in 0, e dunque $C = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Inoltre f ha in 0 una discontinuità di seconda specie.

ES. 4

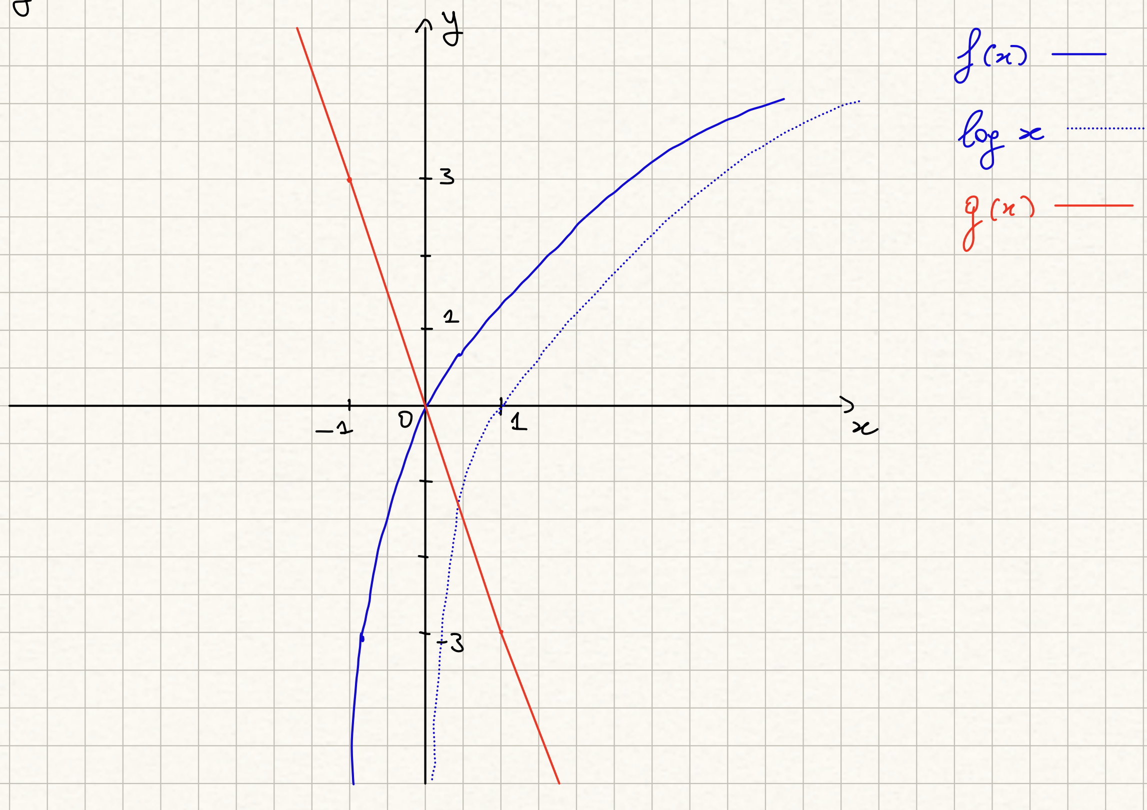
$$x + \log(x+1) \geq -2x$$

Per ricondurci a funzioni il cui grafico è facile da disegnare, riscriviamo la disequazione come

$$\log(x+1) \geq -3x$$

e poniamo $f(x) = \log(x+1)$, $g(x) = -3x$.

Per disegnare il grafico di f, partiamo dal grafico di $\log x$ e lo trasliamo verso sinistra di 1. Il grafico di g è invece la retta $y = -3x$. Quindi



Quindi $f(x) \geq g(x)$ per $x \geq 0$.

ES. 5

Indicando con P l'uscita di un numero pari e con D quella di un numero dispari, l'universo è

$$\Omega = \{PP, PD, DP, DD\}$$

e la variabile aleatoria X definita assume i seguenti valori sui punti di Ω:

$$X(PP) = +2, \quad X(PD) = X(DP) = 0, \quad X(DD) = -2$$

Usando che $\mathbb{P}(\{P\}) = \mathbb{P}(\{D\}) = \frac{1}{2}$ e che i due lanci sono eventi indipendenti, quindi

$$\mathbb{P}(\{PP\}) = \mathbb{P}(\{PD\}) = \mathbb{P}(\{DP\}) = \mathbb{P}(\{DD\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

la legge di X è dunque

$$p(+2) = \mathbb{P}(X = +2) = \mathbb{P}(\{PP\}) = \frac{1}{4}$$
$$p(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{PD, DP\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$p(-2) = \mathbb{P}(X = -2) = \mathbb{P}(\{DD\}) = \frac{1}{4}$$

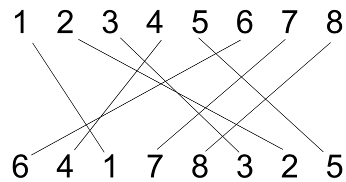
La media di X è

$$E[X] = \sum_{x_i \in \{+2, 0, -2\}} x_i \, p(x_i) = (+2) \cdot \frac{1}{4} + (0) \cdot \frac{1}{2} + (-2) \cdot \frac{1}{4} = 0$$

e la sua varianza è

$$\operatorname{var}(X) = \sum_{x_i \in \{+2, 0, -2\}} x_i^2 \, p(x_i) - (E[X])^2 =$$
$$= (+2)^2 \cdot \frac{1}{4} + (0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (-2)^2 \cdot \frac{1}{4} - (0)^2 = 2$$

[redacted] Soluzione esercizio [redacted] 6



Sono 15 incroci quindi il segno è negativo.

Sia f_i il numero di elementi sulla destra di $\sigma(i)$ più piccoli di $\sigma(i)$. Si ha

$$\sum_{i=1}^{8} f_i = 5 + 3 + 0 + 3 + 3 + 1 + 0 = 15$$

che è dispari quindi il segno della permutazione è negativo.

Col numero di scambi, rappresentati qui dal passaggio di riga in riga,

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 7 & 8 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 7 & 8 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 7 & 5 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 7 & 5 & 6 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

sono 5 scambi quindi il segno è negativo.

[redacted] Soluzione esercizio [redacted] 7

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

[redacted] Soluzione esercizio [redacted] 8

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 8 - 1 - 4 = 3$$

$$x = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(-12 - 3 - 12 - 12) = -13$$

$$y = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 6 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}(12+6+6) = 8$$

$$z = \det\begin{pmatrix}2 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 6\end{pmatrix} = \frac{1}{3}(24+3+6-12) = 7$$

$$Complementi\ algebrici = \begin{pmatrix}4 & -2 & -1\\ -5 & 4 & 2\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$