Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 09-01-2018

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (12 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y + \sin\left(\frac{x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y}{2}\right)$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, x + y \leq 1\right\}\,.$$

Esercizio 2. (8 punti) Data la curva (γ, I), con $I = [-1,1]$ e parametrizzazione

$$\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\,,\, t\right)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(\frac{5}{4}\,,\, \log_e 2\right)$;

ii) calcolare la lunghezza della curva (γ, I).

Esercizio 3. (10 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 3x^2 + y^2 + z^2 = x^4 - 4\right\}$$

i) farne un disegno approssimativo e scriverne una parametrizzazione globale;

ii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 3x^2 + y^2 + z^2 \leq x^4 - 4\,,\, 0 \leq x \leq 3\right\}\,.$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y + \sin\left(\frac{x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y}{2}\right)$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

La funzione è somma di un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$ e della composizione dello stesso polinomio e della funzione $\sin(t)$, dunque è anche differenziabile almeno due volte su tutto $\mathbb{R}^2$. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} (x+y+1)\left(2+\cos\left(\frac{x^2+2y^2+2xy+2x+2y}{2}\right)\right) = 0 \\ (x+2y+1)\left(2+\cos\left(\frac{x^2+2y^2+2xy+2x+2y}{2}\right)\right) = 0 \end{cases}$$

Entrambe le equazioni sono il prodotto di due termini, con il secondo sempre positivo. Dunque il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x+y+1 = 0 \\ x+2y+1 = 0 \end{cases}$$

che ha un'unica soluzione data da $x = -1$ e $y = 0$. Dunque la funzione ammette un unico punto critico

$$C = (-1, 0)$$

Per caratterizzare il punto critico andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f. Osserviamo che essendo f una funzione differenziabile due volte su tutto il dominio, la matrice Hessiana sarà simmetrica. In particolare troviamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2+\cos\left(\frac{x^2+2y^2+2xy+2x+2y}{2}\right) - (x+y+1)^2 \sin\left(\frac{x^2+2y^2+2xy+2x+2y}{2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2+\cos\left(\frac{x^2+2y^2+2xy+2x+2y}{2}\right) - (x+y+1)(x+2y+1) \sin\left(\frac{x^2+2y^2+2xy+2x+2y}{2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4+2\cos\left(\frac{x^2+2y^2+2xy+2x+2y}{2}\right) - (x+2y+1)^2 \sin\left(\frac{x^2+2y^2+2xy+2x+2y}{2}\right)$$

Sostituendo i punti critici troviamo:

$$Hf(C) = Hf(-1,0) = \begin{pmatrix} 2+\cos\left(\frac{1}{2}\right) & 2+\cos\left(\frac{1}{2}\right) \\ 2+\cos\left(\frac{1}{2}\right) & 2\left(2+\cos\left(\frac{1}{2}\right)\right) \end{pmatrix},$$

si ha $\det(Hf(C)) = \left(2+\cos\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 > 0$ e $\text{traccia}(Hf(C)) = 3\left(2+\cos\left(\frac{1}{2}\right)\right) > 0$, dunque C è punto di minimo locale.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, x+y \leq 1\right\}.$$

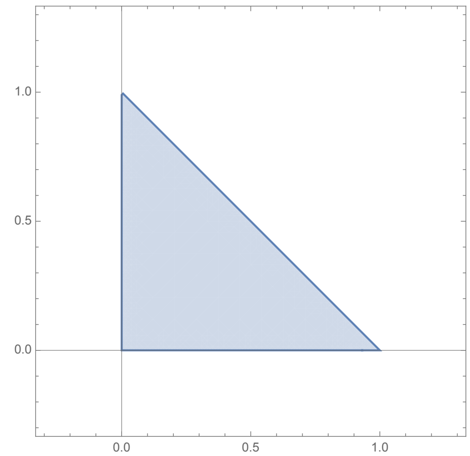

Figure 1: L'insieme Ω.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1. Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω , sui punti critici vincolati al bordo di Ω e sugli eventuali spigoli del bordo.

Abbiamo visto che f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$. L'unico punto critico libero $C = (-1, 0)$ non è interno a Ω.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$, che dividiamo in tre parti. Otteniamo dunque gli spigoli

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{y = 0 \, , \, 0 \leq x \leq 1\} \\ \Gamma_2 &= \{x = 0 \, , \, 0 \leq y \leq 1\} \\ \Gamma_3 &= \{x + y = 1 \, , \, 0 \leq x \leq 1\} \ . \end{aligned}$$

Per quanto riguarda Γ_1 possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_1(t) = (t \, , \, 0) \, , \qquad t \in [0, 1] \ ,$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = t^2 + 2t + \sin\left(\frac{t^2 + 2t}{2}\right) \, , \qquad t \in [0, 1] \ .$$

Risulta $g_1'(t) = (t + 1)\,(2 + \cos\left(\frac{t^2+2t}{2}\right))$, dunque non ci sono punti critici vincolati per $t \in (0, 1)$.

Passiamo a Γ_2, per cui possiamo usare la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (0 \, , \, t) \, , \qquad t \in [0, 1]$$

e componendo con f troviamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = 2t^2 + 2t + \sin\left(t^2 + t\right), \qquad t \in [0,1]$$

Abbiamo $g_2'(t) = (2t+1)\,(2 + \cos\left(t^2+t\right))$, dunque non ci sono punti critici vincolati per $t \in (0,1)$.

Ci rimane da studiare il comportamento di f su Γ_3, che consideriamo un insieme di livello della funzione differenziabile $G(x,y) = x + y$. Il gradiente di G non si annulla su Γ_3, e possiamo quindi applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e cercare soluzioni (x, y, λ) del sistema

$$\begin{cases} (x+y+1)\left(2 + \cos\left(\frac{x^2+2y^2+2xy+2x+2y}{2}\right)\right) = \lambda \\ (x+2y+1)\left(2 + \cos\left(\frac{x^2+2y^2+2xy+2x+2y}{2}\right)\right) = \lambda \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni, ricordando che $\left(2 + \cos\left(\frac{x^2+2y^2+2xy+2x+2y}{2}\right)\right) \neq 0$, troviamo

$$x + y + 1 = x + 2y + 1$$

da cui si ottiene $y = 0$, e dunque $x = 1$. L'unico punto critico vincolato coincide dunque con lo spigolo S_2.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(S_1) = 0 \quad f(S_2) = 3 + \sin\frac{3}{2} \quad f(S_3) = 4 + \sin 2$$

Dunque il minimo è certamente 0. Per determinare il massimo, osserviamo che $0 < \frac{3}{2} < 2 < \pi$, dunque $0 < \sin\frac{3}{2} < 1$ e $\sin 2 > 0$. Ne segue che $4 + \sin 2 > 3 + \sin\frac{3}{2}$, e dunque il massimo è $4 + \sin 2$.

Esercizio 2. *Data la curva (γ, I), con $I = [-1,1]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}, t\right)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(\frac{5}{4}, \log_e 2\right)$;

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in (-1,1)$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = \left(\frac{5}{4}, \log_e 2\right)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in (-1,1)$ tale che $\gamma(t_0) = P$, ossia risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{e^{t_0} + e^{-t_0}}{2} = \frac{5}{4} \\ t_0 = \log_e 2 \end{cases}$$

Basta verificare che $t_0 = \log_e 2$ sia soluzione della prima equazione, ossia che $\frac{2+\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$. La retta tangente al sostegno nel punto P è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{e^{t_0} - e^{-t_0}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$\left(x - \frac{5}{4}\right) - \frac{3}{4}\,(y - \log_e 2) = 0\,.$$

ii) calcolare la lunghezza della curva (γ, I).

La lunghezza di una curva (γ, I) si ottiene calcolando l'integrale su I della norma del vettore tangente $\gamma'(t)$. In questo caso troviamo

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}}{2} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Quindi

$$\ell(\gamma, I) = \int_{-1}^{1} |\gamma'(t)|\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{e^t + e^{-t}}{2}\, dt = e - \frac{1}{e}\,.$$

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 3x^2 + y^2 + z^2 = x^4 - 4\right\}$$

i) farne un disegno approssimativo e scriverne una parametrizzazione globale;

Scrivendola nella forma

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y^2 + z^2 = x^4 - 3x^2 - 4\right\}$$

la superficie si può interpretare come superficie di rotazione, ottenuta facendo ruotare intorno all'asse x il grafico della funzione $g(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 4}$ definita in $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. Infatti il polinomio $x^4 - 3x^2 - 4$ ha radici $x_\pm = \pm 2$, e assume valori positivi per $x < -2$ e $x > 2$. Dunque parametrizzando Σ come superficie di rotazione possiamo scrivere che $\Sigma = \sigma(D)$ dove

$$D = \{(t, \varphi) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \,:\, t \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)\}$$

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{con} \qquad \sigma(t, \varphi) = \left(t\,,\ \sqrt{t^4 - 3t^2 - 4}\ \cos\varphi\,,\ \sqrt{t^4 - 3t^2 - 4}\ \sin\varphi\right)$$

Il disegno di Σ è in figura 2.

ii) calcolare il volume del solido

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 3x^2 + y^2 + z^2 \le x^4 - 4\,,\ 0 \le x \le 3\right\}\,.$$

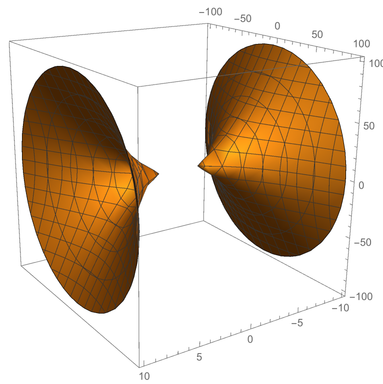

Figure 2: La superficie Σ.

Da quello che abbiamo visto al punto (i), possiamo considerare V come solido di rotazione della forma

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a \leq x \leq b\,,\; y^2 + z^2 \leq g^2(x)\right\}$$

dove $a = 2$, $b = 3$ e $g(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 4}$. Calcoliamo il volume di V integrando per strati, usando la formula

$$\text{Volume}(V) = \iiint_V 1 \, dxdydz = \int_2^3 \left(\iint_{V_x} 1 \, dydz \right) dx = \pi \int_2^3 g^2(x) \, dx$$

dove

$$V_x = \left\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 + z^2 \leq g^2(x)\right\} \,,$$

e dunque $\iint_{V_x} 1 \, dydz = \pi \, g^2(x)$. Ponendo $g^2(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ troviamo dunque

$$\text{Volume}(V) = \pi \int_2^3 \left(x^4 - 3x^2 - 4\right) \, dx = \frac{96}{5} \, \pi \,.$$