Algebra Lineare
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito del 09-01-2012

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche il testo del compito e i fogli di brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (6 punti) Trovare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} e^z = i\, e^{-iz} \\ z + \bar{z} \geq 0 \\ |z| \leq \pi \end{cases}$$

Esercizio 2. (6 punti) (i) Scrivere la matrice A (rispetto alla base canonica) associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(L_A) = \{2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ e $\mathrm{Im}(L_A)$ abbia dimensione uno;

(ii) determinare se la matrice A del punto precedente è triangolabile o diagonalizzabile e, in caso affermativo, rispetto a quale base.

Esercizio 3. (8 punti) Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \right\} \quad \text{e} \quad W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

trovare la dimensione e una base di $U + W$ e $U \cap W$.

Esercizio 4. (6 punti) Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_3 = k \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

e scriverne le soluzioni esplicitamente per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esistono.

Esercizio 5. (6 punti) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

i) dire se è invertibile;

ii) dire se è diagonalizzabile e rispetto a quale base.

Svolgimento

- **Esercizio 1** *Trovare le soluzioni complesse del sistema*

$$\begin{cases} e^z = i\, e^{-iz} \\ z + \bar{z} \geq 0 \\ |z| \leq \pi \end{cases}$$

Scriviamo la prima equazione del sistema nella forma

$$e^z = i\, e^{-iz} \quad \Longleftrightarrow \quad e^z = e^{i\frac{\pi}{2} - iz}$$

da cui, per la periodicità dell'esponenziale nel campo complesso, troviamo

$$z = i\frac{\pi}{2} - iz + 2k\pi i \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

e quindi le soluzioni della prima equazione sono

$$z = \frac{1}{1+i}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i = \frac{1-i}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i = \left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + \left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) i \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

La seconda condizione del sistema si traduce nella condizione

$$\mathrm{Re}(z) = \pi\left(\frac{1}{4} + k\right) \geq 0$$

e la terza si traduce in

$$|z|^2 = 2\,\pi^2\left(\frac{1}{4} + k\right)^2 \leq \pi^2$$

Da cui si ricava che l'unica soluzione del sistema è

$$z = \frac{\pi}{4}\,(1+i)$$

- **Esercizio 2** *(i) Scrivere la matrice A (rispetto alla base canonica) associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(L_A) = \{2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ e $Im(L_A)$ abbia dimensione uno;*

Troviamo innanzitutto una base di $V = \{2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ e la completiamo a una base di $\mathbb{R}^3$. Si trova

$$V = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

e quindi una possibile base di $\mathbb{R}^3$ è

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

(basta infatti verificare che i tre vettori sono linearmente indipendenti). A questo punto si tratta di definire L_A sui vettori di $\mathcal{B}$ in modo che vengano soddisfatte le richieste. Poniamo allora

$$L_A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = L_A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in modo che sia verificato che $\ker(L_A) = V$, e

$$L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

per ottenere che $\mathrm{Im}(L_A)$ ha dimensione uno.

Infine per scrivere la matrice A dobbiamo calcolare le immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Abbiamo $L_A(e_3) = e_3$, e per gli altri due

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 2e_3 \qquad \Longrightarrow \qquad L_A(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2e_3 \qquad \Longrightarrow \qquad L_A(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) determinare se la matrice A del punto precedente è triangolabile o diagonalizzabile e, in caso affermativo, rispetto a quale base.

Osserviamo che i vettori della base $\mathcal{B}$ sono, per come abbiamo definito L_A, autovettori di autovalori $\{0, 0, 1\}$. Quindi certamente A è diagonalizzabile rispetto alla base $\mathcal{B}$.

- **<u>Esercizio 3</u>** *Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$*

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \right\} \quad e \quad W = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

trovare la dimensione e una base di $U + W$ e $U \cap W$.

Troviamo una base di U risolvendo il sistema. Per farlo partiamo dalla matrice dei coefficienti C e la riduciamo a scala, ottenendo

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sim \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo che

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

e quindi $\dim(U) = 2$.

Verifichiamo poi che $\dim(W) = 3$ e che quindi i vettori che lo generano sono anche una base.

Cerchiamo adesso $\dim(U+W)$ e una sua base. Per farlo scriviamo la matrice che ha come colonne i vettori delle basi di U e W, e la riduciamo a scala. Otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sim \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi $\dim(U+W) = rango(A) = rango(S) = 4$. Se ne deduce che $U+W = \mathbb{R}^4$ e come base possiamo scegliere la base canonica di $\mathbb{R}^4$ o le colonne prima, seconda, terza e quinta di A.

Applichiamo ora la Formula di Grassmann

$$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$$

e otteniamo $\dim(U \cap W) = 1$. Per trovarne una base cerchiamo una base di $\ker(A)$ per scrivere combinazioni lineari dei vettori di U o W. Ricordiamo che $\ker(A) = \ker(S)$, quindi

$$\ker(A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Se ne deduce che

$$U \cap W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

- **<u>Esercizio 4</u>** *Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_3 = k \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

e scriverne le soluzioni esplicitamente per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esistono.

Il sistema lineare è quadrato, quindi calcoliamo innanzitutto il rango della matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Si trova $\det(A) = 0$, quindi il rango di A è minore di 3. Inoltre la prima sottomatrice principale 2×2 di A ha determinante diverso da 0, quindi $rango(A) = 2$.

Studiamo ora il rango della matrice completa

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & k \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Calcolando il determinante della sottomatrice 3×3 B' di A' che si ottiene togliendo la prima colonna, si trova $\det(B') = 6k - 18$. Quindi se $k \neq 3$ si ha $rango(A') = 3$. Se $k = 3$, si ha $\det(B') = 0$, ma questo non basta per concludere che $rango(A') = 2$. Per farlo bisogna controllare che tutte le sottomatrici 3×3 abbiano determinante nulla. Verificata la cosa, si conclude che $rango(A') = 2$. per $k = 3$.

Quindi per $k \neq 3$ il sistema non è compatibile, mentre se $k = 3$ il sistema è compatibile, e il suo insieme di soluzioni $\mathcal{S}$ verifica

$$\dim(\mathcal{S}) = 3 - rango(A) = 1$$

Per determinare $\mathcal{S}$, poniamo $k = 3$ e riduciamo A' ad una matrice a scala. Si ottiene la matrice

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

e quindi risolviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ -x_2 + 4x_3 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che l'insieme delle soluzioni $\mathcal{S}$ nel caso $k = 3$ è il sottospazio affine

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

- **<u>Esercizio 5</u>** *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

i) dire se è invertibile;

Usandoo il fatto che una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da 0, si trova $\det(A) = -4$ e quindi A è invertibile.

(ii) dire se è diagonalizzabile e rispetto a quale base.

Dobbiamo cercare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Scriviamo il polinomio caratteristico di A

$$p_A(t) = \det(A - tI) = -(t^3 - 3t^2 + 4) = (t + 1)(t - 2)^2$$

Quindi troviamo che gli autovalori sono $\{-1, 2\}$ con molteplicità algebriche $m_{-1} = 1$ e $m_2 = 2$. Cerchiamo le molteplicità geometriche:

$$g_{-1} = \dim\ker(A + I) = \dim\ker \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

$$g_2 = \dim\ker(A - 2I) = \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

anche se per l'autovalore -1, poiché $m_{-1} = 1$, si poteva subito concludere che $g_{-1} = m_{-1} = 1$. Quindi poiché $m_{-1} + m_2 = g_{-1} + g_2 = 3$, si conclude che la matrice A è diagonalizzabile.

La base $\mathcal{C}$ che la rende diagonale avrà un autovettore relativo all'autovalore -1, dato da

$$(A+I)v = 0 \quad \implies \quad v \in \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

e due autovettori relativi all'autovalore 2, dati da

$$(A-2I)v = 0 \quad \implies \quad v \in \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Quindi

$$\mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$