Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 09-02-2016

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (13 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \log\left(1 + \frac{x^4+y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) dire in quali punti del dominio è continua;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ sull'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \geq 0\,,\, x^2+y^2 \geq 1\,,\, x^2+y^2 \leq 4\right\}$$

Esercizio 2. (12 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}\sqrt{1+y^2}\,dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\,,\, x \leq y^2\right\}$.

Esercizio 3. (8 punti) Data la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + 2xy + z^3 + \log(1+y^2z^2) = 0\right\}$$

i) scrivere, se possibile, l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nei punti:

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ii) determinare, se possibile, una parametrizzazione locale di Σ in un intorno dei punti P, Q del punto precedente.

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \log\left(1+\frac{x^4+y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0) \\ 0\,, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

i) dire in quali punti del dominio è continua;

La funzione $f(x,y)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. Infatti per $(x,y)\neq(0,0)$, l'argomento del logaritmo è sempre positivo e il denominatore presente non si annulla mai.

Dalla definizione della funzione, la sua continuità è garantita su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, parte interna del primo sottoinsieme di definizione, in quanto composizione di funzioni continue.

Rimane quindi da studiare solo la continuità nell'origine. Dobbiamo quindi determinare se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \log\left(1+\frac{x^4+y^2}{x^2+y^2}\right) = f(0,0) = 0\,.$$

Iniziamo a studiarne il comportamento lungo le rette della forma $y=\lambda x$ con $\lambda\in\mathbb{R}$. Si trova

$$\lim_{y=\lambda x,\,(x,y)\to(0,0)} \log\left(1+\frac{x^4+y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\log\left(1+\frac{x^4+\lambda^2x^2}{x^2(1+\lambda^2)}\right) = \log\left(1+\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\right).$$

Poiché lungo le rette troviamo risultati diversi, e in particolare diversi da 0 se $\lambda\neq 0$, possiamo affermare che la funzione non è continua in $(0,0)$.

Concludiamo quindi che la funzione $f(x,y)$ è continua su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ sull'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x\geq 0\,,\, x^2+y^2\geq 1\,,\, x^2+y^2\leq 4\right\}$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1. Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a Ω, sui punti critici vincolati al bordo di Ω, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non differenziabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non differenziabilità in Ω in quanto composizione di funzioni differenziabili. Cerchiamo eventuali punti critici interni. Cerchiamo soluzioni nella parte interna di Ω del sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{1+\frac{x^4+y^2}{x^2+y^2}}\,\frac{x(x^4+2x^2y^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0 \\ \frac{1}{1+\frac{x^4+y^2}{x^2+y^2}}\,\frac{2x^2y(1-x^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases}$$

Il termine $\frac{1}{1+\frac{x^4+y^2}{x^2+y^2}}$ è sempre ben definito su Ω e non si annulla mai, e quindi si può semplificare in entrambe le equazioni. Anche il denominatore x^2+y^2 non si annulla mai su Ω, e quindi il sistema

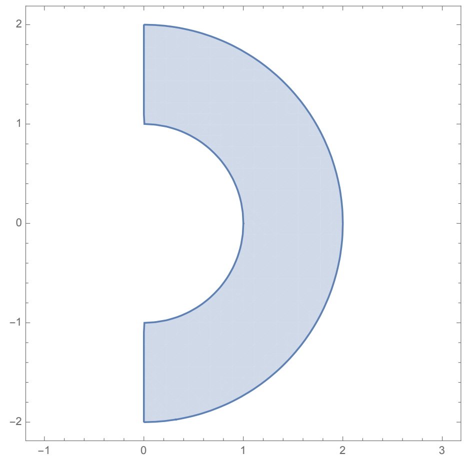

Figure 1: L'insieme Ω.

si riduce a

$$\begin{cases} x(x^4 + 2x^2y^2 - y^2) = 0 \\ 2x^2y(1 - x^2) = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni della seconda equazione sono $x = 0$ oppure $y = 0$ oppure $x = \pm 1$. Sostituendo nella prima equazione si trova che: se $x = 0$ la prima equazione è sempre soddisfatta, dunque tutti i punti della forma $(0, y)$ sono critici, ma non sono interni a Ω (sono sul bordo e si ritroveranno nello studio del bordo); se $y = 0$, nella prima equazione si trova $x^5 = 0$, e dunque si trova come soluzione $(0, 0)$ che non appartiene a Ω, e non è neanche ammissibile come punto critico; se $x = \pm 1$, nella prima equazione si trova ancora $x^5 = 0$ che quindi non ha soluzioni.

In conclusione, non ci sono punti critici liberi di f interni a Ω.

Passiamo al comportamento di f sul bordo di Ω. Gli spigoli sono i punti

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad Q_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Il bordo è composto da quattro parti

$$\Gamma_1 = \left\{x^2 + y^2 = 4\,,\ x \geq 0\right\}$$
$$\Gamma_2 = \left\{x^2 + y^2 = 1\,,\ x \geq 0\right\}$$
$$\Gamma_3 = \{x = 0\,,\ 1 \leq y \leq 2\}$$
$$\Gamma_4 = \{x = 0\,,\ -2 \leq y \leq -1\}$$

Studiamo prima f ristretta a Γ_1. Parametrizziamo la curva tramite

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{4 - t^2} \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [-2\,,\ 2]$$

Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = \log\left(1 + \frac{t^4 - 7t^2 + 16}{4}\right), \qquad t \in [-2\,,\ 2]$$

Si trova $g_1'(t) = \frac{1}{1+\frac{t^4-7t^2+16}{4}}\,(t^3 - \frac{7}{2}t)$, che si annulla per $t = 0, \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$, tutti in $[-2\,,\,2]$ e quindi ammissibili. Otteniamo i punti critici vincolati

$$Q_5 = \gamma_1(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q_6 = \gamma_1\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{7}{2}} \end{pmatrix} \qquad Q_7 = \gamma_1\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{7}{2}} \end{pmatrix}.$$

Studiamo ora f ristretta a Γ_2. Parametrizziamo la curva tramite

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2} \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [-1\,,\,1]$$

Componiamo con f e otteniamo la funzione di una variabile

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = \log\left(t^4 - t^2 + 2\right)\,, \qquad t \in [-2\,,\,2]$$

Si trova $g_1'(t) = \frac{1}{t^4-t^2+2}\,(4t^3 - 2t)$, che si annulla per $t = 0, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, tutti in $[-1\,,\,1]$ e quindi ammissibili. Otteniamo i punti critici vincolati

$$Q_8 = \gamma_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q_9 = \gamma_2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \qquad Q_{10} = \gamma_2\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Studiando f su Γ_3 e Γ_4 ci accorgiamo che f è costante. Infatti entrambi i segmenti sono parametrizzati da

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

per valori diversi di t, e

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = \log(2)\,.$$

Questo è equivalente al fatto che tutti i punti sono critici vincolati (sappiamo già che sono critici liberi), e quindi come valori di riferimento possiamo considerare quelli degli spigoli.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(Q_1) = f(Q_2) = f(Q_3) = f(Q_4) = \log(2)\,,$$

$$f(Q_5) = \log(5)\,, \quad f(Q_6) = f(Q_7) = \log\left(\frac{31}{16}\right)\,,$$

$$f(Q_8) = \log(2)\,, \quad f(Q_9) = f(Q_{10}) = \log\left(\frac{7}{4}\right)\,,$$

Per cui su Ω, il minimo di f è $\log\left(\frac{7}{4}\right)$, e il massimo è $\log(5)$.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}\,\sqrt{1+y^2}\,dx\,dy$$

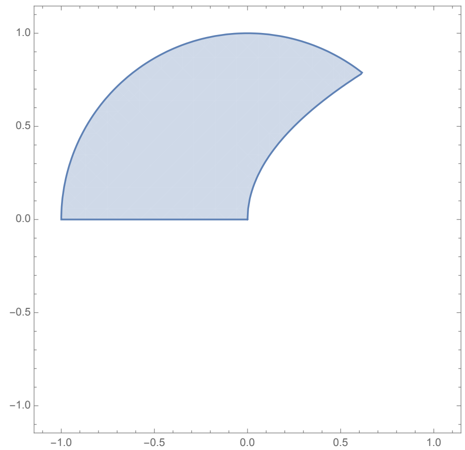

Figure 2: L'insieme Ω.

dove $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\,,\, x \leq y^2\right\}$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

La funzione da integrare e il dominio suggeriscono di risolvere l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}\sqrt{1+y^2}\; dx\,dy = \iint_S \sin^3\theta\,\cos\theta\,\rho\sqrt{1+\rho^2\sin^2\theta}\; d\rho\,d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \,:\, \rho\sin\theta \geq 0\,,\, \rho^2 \leq 1\,,\, \rho\cos\theta \leq \rho^2\sin^2\theta\right\}$$

La prima e la seconda condizione ci dicono che

$$\rho \leq 1 \quad \text{e} \quad \theta \in [0,\pi]\ ,$$

mentre la terza condizione si riscrive come

$$\rho \geq \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,.$$

Siamo quindi arrivati a

$$S = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \,:\, 0 \leq \theta \leq \pi\,,\, \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \leq \rho \leq 1\right\}$$

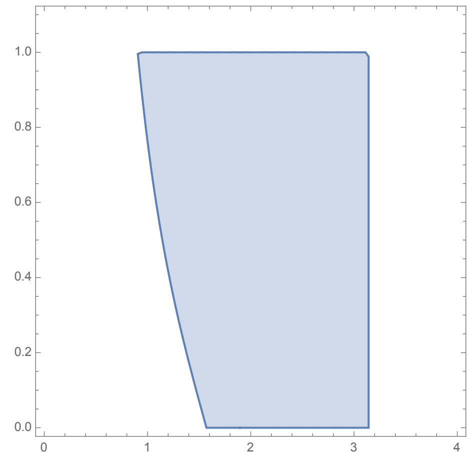

Figure 3: L'insieme S.

L'insieme S è rappresentato nella figura 3 con ρ sulle ordinate e θ sulle ascisse. Per scriverlo come insieme semplice dobbiamo considerare $\bar{\theta} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tale che

$$\frac{\cos\bar{\theta}}{\sin^2\bar{\theta}} = 1\,,$$

e osservare che $\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = 0$ per $\theta = \frac{\pi}{2}$. Possiamo quindi scrivere S come unione di due insiemi semplici, ossia

$$S = \left\{(\rho,\theta)\,:\,\bar{\theta} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\,, \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \le \rho \le 1\right\} \quad \bigcup \quad \left\{(\rho,\theta)\,:\,\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi\,, 0 \le \rho \le 1\right\}.$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}\sqrt{1+y^2}\;dx\,dy = \iint_S \sin^3\theta\,\cos\theta\,\rho\,\sqrt{1+\rho^2\sin^2\theta}\;d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_{\bar{\theta}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}^1 \sin^3\theta\,\cos\theta\,\rho\,\sqrt{1+\rho^2\sin^2\theta}\;d\rho\right)d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_0^1 \sin^3\theta\,\cos\theta\,\rho\,\sqrt{1+\rho^2\sin^2\theta}\;d\rho\right)d\theta =$$

$$= \int_{\bar{\theta}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\,\cos\theta\left(\frac{(1+\rho^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{3\sin^2\theta}\Big|_{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}^1\right)d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^3\theta\,\cos\theta\left(\frac{(1+\rho^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{3\sin^2\theta}\Big|_0^1\right)d\theta =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{\bar{\theta}}^{\pi}\sin\theta\,\cos\theta\,(1+\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\,d\theta - \frac{1}{3}\int_{\bar{\theta}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta - \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\theta\,\cos\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{(1+\sin^2\theta)^{\frac{5}{2}}}{15}\Big|_{\bar{\theta}}^{\pi} + \frac{1}{3\,\sin\theta}\Big|_{\bar{\theta}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin^2\theta}{6}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{17}{30} - \frac{(1+\sin^2\bar{\theta})^{\frac{5}{2}}}{15} - \frac{1}{3\,\sin\bar{\theta}}\,.$$

Per concludere basta osservare che dalla condizione su $\bar{\theta}$ si ricava che $\cos\bar{\theta} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, e quindi $\sin\bar{\theta} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Esercizio 3. *Data la superficie*

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + 2xy + z^3 + \log(1 + y^2 z^2) = 0\}$$

i) scrivere, se possibile, l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nei punti:

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La superficie Σ è scritta come insieme di livello della funzione di classe C^1

$$F(x,y,z) = x^2 + 2xy + z^3 + \log(1 + y^2 z^2)$$

dunque certamente esiste il piano tangente nei punti di Σ in cui non si annulla il gradiente di F. Abbiamo

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 2x + \frac{2yz^2}{1+y^2z^2} \\ 3z^2 + \frac{2y^2 z}{1+y^2z^2} \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\nabla F(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla F(Q) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Ne segue che il piano tangente a Σ esiste certamente in Q, e la sua equazione cartesiana è

$$-2(x+1) - 2(y-0) + 3(z+1) = 0\,.$$

(*Approfondimento.* La condizione $\nabla F(P) = 0$ non implica che necessariamente il piano tangente non esista in P. Il problema andrebbe studiato in maniera più approfondita e va al di là di quello che è richiesto in questo esame. Tuttavia il disegno di Σ in figura 4 suggerisce che in effetti il piano tangente non esista in P.)

ii) determinare, se possibile, una parametrizzazione locale di Σ in un intorno dei punti P, Q del punto precedente.

Per il Teorema delle Funzioni Implicite, siamo certi di poter trovare una parametrizzazione locale di Σ come grafico di una funzione in un intorno dei punti in cui non si annulla il gradiente di F, dunque nel punto Q.

Nel caso del punto Q, poiché

$$\frac{\partial F}{\partial x}(Q) \neq 0\,,$$

esistono un intorno $U(0,-1)$, un intorno $V(-1)$ ed una funzione $g(y,z) : U \to V$ tale che $g(0,-1) = -1$ e $F(g(y,z), y, z) = 0$ per ogni $(y,z) \in U$. Quindi Σ si può parametrizzare localmente come grafico della funzione g. Dall'equazione

$$F(g(y,z), y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g^2(y,z) + 2yg(y,z) + z^3 + \log(1 + y^2 z^2)$$

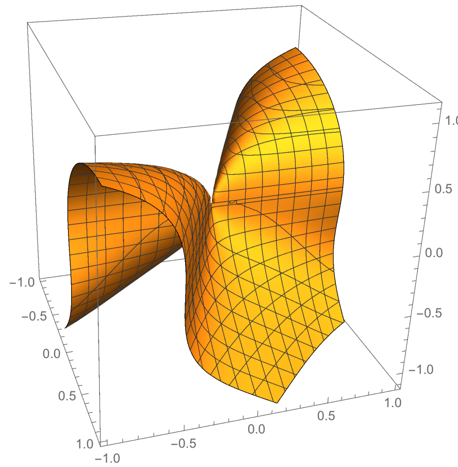

Figure 4: La superficie Σ in un intorno di P.

con la condizione $g(0,-1) = -1$, troviamo

$$g(y,z) = -y - \sqrt{y^2 - z^3 - \log(1 + y^2 z^2)}$$

La parametrizzazione locale di Σ è quindi data da

$$\sigma(u,v) = (g(u,v),\, u,\, v)$$

con $(u,v) \in U$, dove

$$g(u,v) = -u - \sqrt{u^2 - v^3 - \log(1 + u^2 v^2)}\,.$$