

Elementi di Matematica e Statistica
Corso di Laurea in Tecniche per le Costruzioni Civili e la Gestione del Territorio
Compito del 03-02-2026

Esercizio 1. Determinare il dominio naturale D della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\log(x-1)}$$

e dire come si comporta la funzione nei punti estremi di D .

Esercizio 2. Trovare gli eventuali asintoti orizzontali o obliqui a $+\infty$ per la funzione

$$f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^3 - x}$$

Esercizio 3. Determinare l'insieme C dei punti nel quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{se } x \geq 0; \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

è continua, e classificare le eventuali discontinuità.

Esercizio 4. Risolvere con il metodo grafico la disequazione

$$e^{-x^2} + 5x < x + 1$$

Esercizio 5. Un campione statistico x contiene i seguenti dati

$$x = \{-1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 4\}$$

Rappresentare il campione con un istogramma, e calcolare media e scarto quadratico medio del campione.

Esercizio 6. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, trovare il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ ortogonale ai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7. Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste l'inversa della seguente matrice A , e in caso determinarla:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

Esercizio 8. Usare le mosse di Gauss per trovare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x - 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x - y - 3z = -1 \end{cases}$$

ES. 1

$$f(x) = \frac{1}{\log(x-1)}$$

Il dominio naturale di f è dato da

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \log(x-1) \neq 0, x-1 > 0\}$$

Perché $\log(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 1$, la prima condizione diventa $x \neq 2$, quindi

$$D = (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

Gli estremi di D sono $1, 2, +\infty$, nessuno appartenente a D . Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\log(x-1)} = \frac{1}{-\infty} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\log(x-1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\log(x-1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(x-1)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

ES. 2

$$f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^3 - x}$$

Il dominio naturale di f è $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, +1\}$.

Verifichiamo l'esistenza di asintoti a $+\infty$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 2}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(1 + \frac{2}{x^4}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1 + \frac{2}{x^4}}{1 - \frac{1}{x^2}} = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

quindi f non ha un asintoto orizzontale a $+\infty$. Vediamo se ha un asintoto obliquo. Calcoliamo

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 2}{x^3 - x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 2}{x^4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(1 + \frac{2}{x^4}\right)}{x^4 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^4}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^4 + 2}{x^3 - x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^4 + 2) - x(x^3 - x)}{x^3 - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 0^+ \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Quindi f ha asintoto obliquo a $+\infty$ dato da $y = x$.

ES. 3

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & , \quad \text{se } x \geq 0 \\ \frac{\sin x}{x} & , \quad \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Il dominio naturale di f è $D = \mathbb{R}$. Inoltre su $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$, la funzione si scrive come composizione di funzioni continue, quindi f è continua certamente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Resta da valutare come si comporta in 0. Affinché f sia continua in 0, deve verificarsi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{si tratta di un limite notevole})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + 1) = 0 + 1 = 1$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ esiste ed è uguale a 1. Poiché $f(0) = 1$, concludiamo che f è continua anche in 0. Quindi $C = \mathbb{R}$.

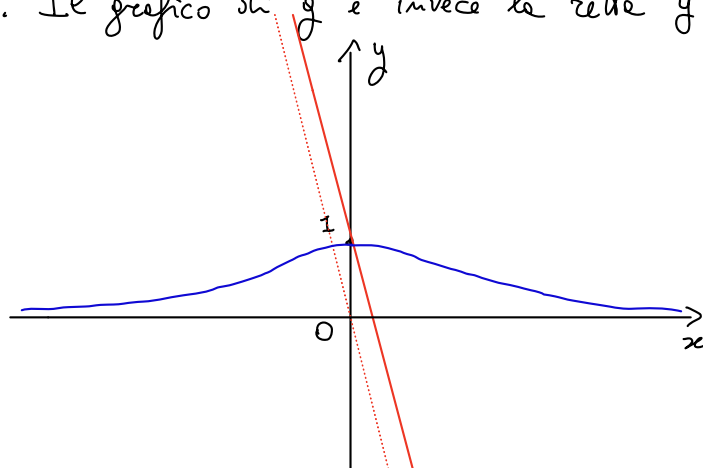
ES. 4

$$e^{-x^2} + 5x < x + 1$$

Per ricondurre a funzioni il cui grafico è facile da disegnare, riscriviamo la disuguaglianza come

$$e^{-x^2} < -4x + 1$$

e poniamo $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = -4x + 1$. La funzione f è pari e il suo grafico è simile a quello di e^x per $x \leq 0$, per ottenere quello di f basta poi considerare il simmetrico per $x \geq 0$. Il grafico di g è invece la retta $y = -4x$ traslata in alto di 1.



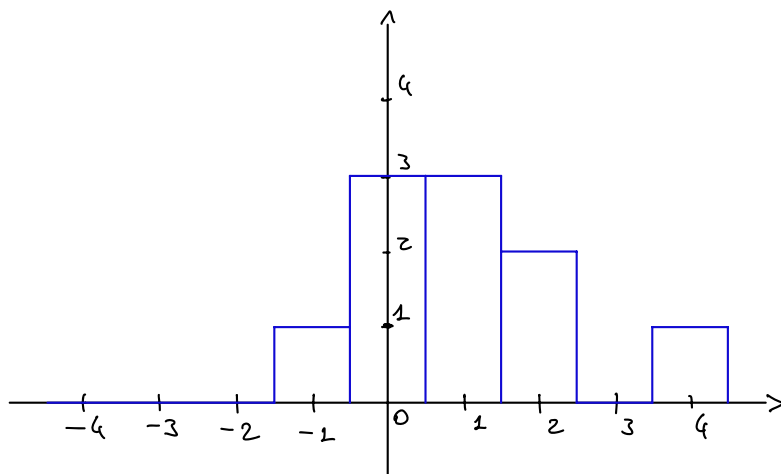
$$\begin{aligned} f(x) & \text{ — (blue solid line)} \\ g(x) & \text{ — (red solid line)} \\ y = -4x & \text{ (red dotted line)} \end{aligned}$$

Quindi $f(x) < g(x)$ per $x \in (-\infty, 0)$.

ES. 5

$$x = \{-1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 4\}$$

L'istogramma relativo al campione statistico x è



La media $\bar{x}$ del campione si calcola come

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

dove N è la numerosità del campione, in questo caso $N=10$, e x_i sono i dati.

Quindi

$$\bar{x} = \frac{1}{10} (-1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 4) = \frac{10}{10} = 1.$$

Lo scarto quadratico medio $\sigma(x)$ del campione si calcola come

$$\sigma(x) = \sqrt{\text{var}(x)}$$

dove $\text{var}(x)$ è la varianza del campione, che si può calcolare come

$$\text{var}(x) = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

$$4+4+4+16=$$

Quindi

$$\text{var}(x) = \frac{1}{10} ((-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2) - 1^2 = \frac{28}{10} - 1 = \frac{9}{5}$$

e

$$\sigma(x) = \sqrt{\text{var}(x)} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

ES. 6

Sono dati $v_1 = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$

Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a v_1 e v_2 è l'insieme W delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \langle v_1, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle = kx + y - z = 0 \\ \langle v_2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle = 4x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è $A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Usiamo le mosse di Gauss per ridurre la matrice completa C a una matrice con pivot uguali a 1, e 0 sopra i pivot.

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 0 \\ 4-2k & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Poniamo $k=2$, quindi $4-2k=0$. In questo caso,

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_1 \rightarrow \frac{1}{2} C_1, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

e il sistema è equivalente a
$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \\ y = t \\ z = s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

e quindi

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{se } k=2.$$

Consideriamo ora il caso $k \neq 2$. Quindi $4-2k \neq 0$. In questo caso,

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 0 \\ 4-2k & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_2 \rightarrow \frac{1}{4-2k} C_2, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Scambiamo C_1 e C_2 , $C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$

Se $k=0$, la matrice C è nella forma desiderata. Se $k \neq 0$ facciamo ancora la mossa $C_2 \rightarrow C_2 - kC_1$. In entrambi i casi, scriviamo e

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Il sistema iniziale è quindi equivalente a

$$\begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

da cui ricaviamo che

$$W = \text{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{se } k \neq 2.$$

ES. 7

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

La matrice inversa di A esiste se e solo se $\det A \neq 0$. Si ha

$$\begin{matrix} \oplus \\ \ominus \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}, \quad \det A = 2k - 1$$

quindi l'inversa A^{-1} esiste se e solo se $k \neq \frac{1}{2}$. Calcoliamola usando

$$C = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$C_2 \rightarrow 2C_2 - C_1, \quad C = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2k-1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$C_1 \rightarrow (2k-1)C_1 - C_2, \quad C = \left(\begin{array}{cc|cc} 2(2k-1) & 0 & 2k & -2 \\ 0 & 2k-1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$C_1 \rightarrow \frac{1}{2(2k-1)} C_1, \quad C_2 \rightarrow \frac{1}{2k-1} C_2, \quad C = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{k}{2k-1} & -\frac{1}{2k-1} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2k-1} & \frac{2}{2k-1} \end{array} \right)$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{k}{2k-1} & -\frac{1}{2k-1} \\ -\frac{1}{2k-1} & \frac{2}{2k-1} \end{pmatrix} \quad \text{per } k \neq \frac{1}{2}.$$

ES. 8

$$\begin{cases} 3x - 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x - y - 3z = -1 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare in $N=3$ variabili non omogeneo, con matrice dei coefficienti $A \in M(3 \times 3)$ e termine noto $\underline{b}$ dati da

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Applichiamo le mosse di Gauss alla matrice completa $C = (A | \underline{b})$ per capire quanti pivot non nulli esistono.

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \end{array} \right)$$

$$C_2 \rightarrow 3C_2 - C_1, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \end{array} \right)$$

$$C_3 \rightarrow 3C_3 - C_1, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{array} \right)$$

$$C_2 \rightarrow \frac{1}{3} C_1, \quad C_2 \rightarrow \frac{1}{6} C_2, \quad C_3 \rightarrow -\frac{1}{3} C_3, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$C_3 \rightarrow C_3 - C_2 \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La matrice ottenuta ha due pivot diversi da zero ed entrambi uguali a 1. Inoltre, sopra i pivot i termini sono nulli. Quindi il sistema iniziale è equivalente a

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 1 \\ z = t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi le soluzioni del sistema sono lo spazio affine di dimensione 1,

$$W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$