Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 01-07-2026

Esercizio 1. **(10 punti)** Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 3 + \mu \\ \dot{y} = xy - 3 + 2\mu \end{cases}$$

(a) al variare di $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 3$;

(b) per $\mu = 3$, dire se esiste $a \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $I(x, y) = ax - \frac{3}{2}x^{-1} - y$ ha insiemi di livello invarianti, e usarla per disegnare il ritratto di fase.

Esercizio 2. **(10 punti)** Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y^3 \\ \dot{y} = -(x+1)(x-1)(x-2) \end{cases}$$

(a) disegnare il ritratto di fase;

(b) indicando con $(x(t,(x_0,y_0)), y(t,(x_0,y_0)))$ l'orbita del punto (x_0, y_0), mostrare che

$$x^* := \inf \left\{ x_0 \in \mathbb{R} \, : \, \sup_{t \in \mathbb{R}} x(t,(x_0,0)) \leq 1 \right\}$$

esiste finito (*Bonus:* determinarlo).

Esercizio 3. **(10 punti)** Si consideri la funzione continua $f : [0,1] \to [0,1]$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x \,, & x \in J_1 = [0, \frac{1}{4}] \\ x + \frac{1}{4} \,, & x \in J_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \frac{7}{4} - 2x \,, & x \in J_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 3x - 2 \,, & x \in J_4 = [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

(a) Costruire l'f-grafo di $\mathcal{J}$.

(b) Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ esiste un'orbita periodica di f di periodo minimo n.

(c) Trovare esplicitamente un ferro di cavallo per f^2.

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 3 + \mu \\ \dot{y} = xy - 3 + 2\mu \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

(a) $\mu \neq 3$.

Troviamo i punti fissi del sistema. Dalla prima equazione, abbiamo $x^2 = 3-\mu$. Quindi ci sono soluzioni se $\mu < 3$, date da $x = \pm\sqrt{3-\mu}$. Sostituendo nella seconda equazione troviamo i punti fissi:

- se $\mu > 3$, non esistono;
- se $\mu < 3$, $P_1 = \left(\sqrt{3-\mu}, \frac{3-2\mu}{\sqrt{3-\mu}}\right)$, $P_2 = \left(-\sqrt{3-\mu}, -\frac{3-2\mu}{\sqrt{3-\mu}}\right)$

Studiamo la loro stabilità. Si ha

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$$

Quindi, se $\mu \in (-\infty, 3)$:

- $JF(P_1) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3-\mu} & 0 \\ \frac{3-2\mu}{\sqrt{3-\mu}} & \sqrt{3-\mu} \end{pmatrix}$, che ha autovalori $\lambda_1 = 2\sqrt{3-\mu} > 0$, $\lambda_2 = \sqrt{3-\mu} > 0$.

  Quindi P_1 è punto iperbolico di tipo nodo instabile;

- $JF(P_2) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3-\mu} & 0 \\ -\frac{3-2\mu}{\sqrt{3-\mu}} & -\sqrt{3-\mu} \end{pmatrix}$, che ha autovalori $\lambda_1 = -2\sqrt{3-\mu} < 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{3-\mu} < 0$.

  Quindi P_2 è punto iperbolico di tipo nodo stabile.

Rette invarianti. Studiamo prima il caso di rette parallele agli assi.

Se $\mu < 3$, $\dot{x}\big|_{\{x = \pm\sqrt{3-\mu}\}} \equiv 0$, quindi ci sono due rette invarianti, $x = -\sqrt{3-\mu}$ e $x = \sqrt{3-\mu}$.

Se $\mu = \frac{3}{2}$, $\dot{y}\big|_{\{y=0\}} \equiv 0$, quindi $y = 0$ è invariante. Se $\mu \neq \frac{3}{2}$, non ci sono rette invarianti $y = c$.

Se $\mu > 3$, non ci sono rette parallele agli assi.

Consideriamo ora rette della forma $ax+by=c$, con $a,b\neq 0$. Poniamo $I(x,y)=ax+by$, si ha

$$\dot{I}\big|_{\{I=c\}}(x,y) = a(x^2-3+\mu)+b(xy-3+2\mu)\Big|_{y=\frac{c-ax}{b}} =$$

$$= ax^2+a(-3+\mu)+x(c-ax)+b(-3+2\mu)$$

$$= cx + a(-3+\mu)+b(-3+2\mu)$$

Ponendo $\dot{I}\big|_{\{I=c\}}\equiv 0$ si trova $c=0$. Se $\mu=\frac{3}{2}$, si avrebbe $a=0$, che non è ammissibile.

Se $\mu\neq\frac{3}{2}$, poniamo $b=-a\frac{(-3+\mu)}{(-3+2\mu)}$, e troviamo la retta invariante

$$(-3+2\mu)x-(-3+\mu)y=0.$$

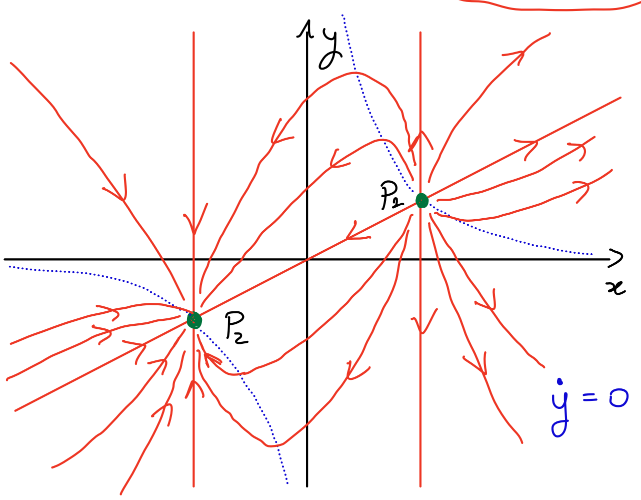
Orbite periodiche. Per la teoria dell'indice di Poincaré, le orbite periodiche potrebbero esistere solo per $\mu>3$, racchiudendo P_1 o P_2, o entrambi. Ma poiché P_1 e P_2 stanno su una retta invariante, per l'unicità locale delle soluzioni, non possono esserci orbite periodiche.

Simmetrie. Se $(x(t),y(t))$ è soluzione del sistema, lo è anche $(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))=(-x(-t),-y(-t))$.
Infatti, ponendo $S(x,y)=(-x,-y)$ si ha

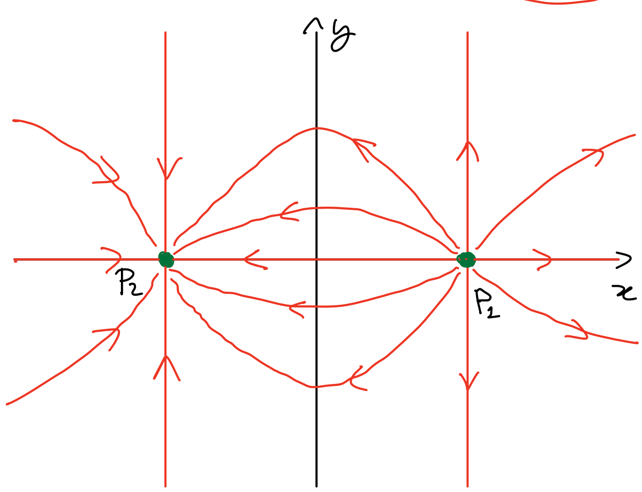
$$JS_{(x,y)}(F(x,y)) = (-x^2+3-\mu,\ -xy+3-2\mu) = -F(S(x,y))$$

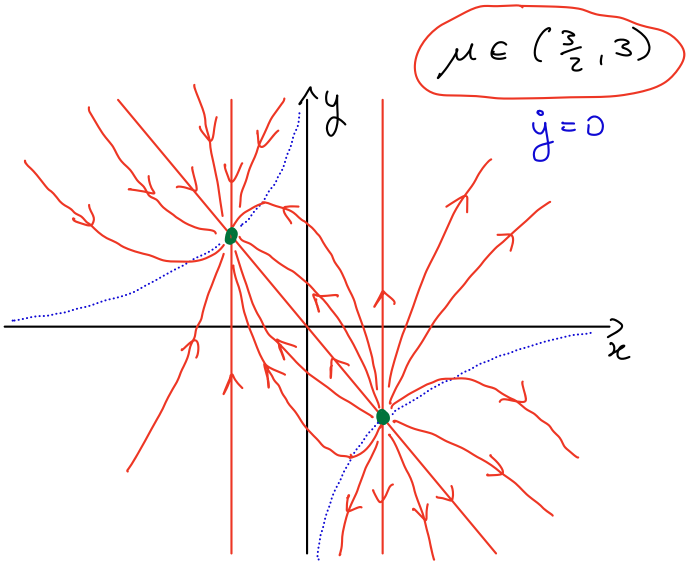
Ritratti di fase.

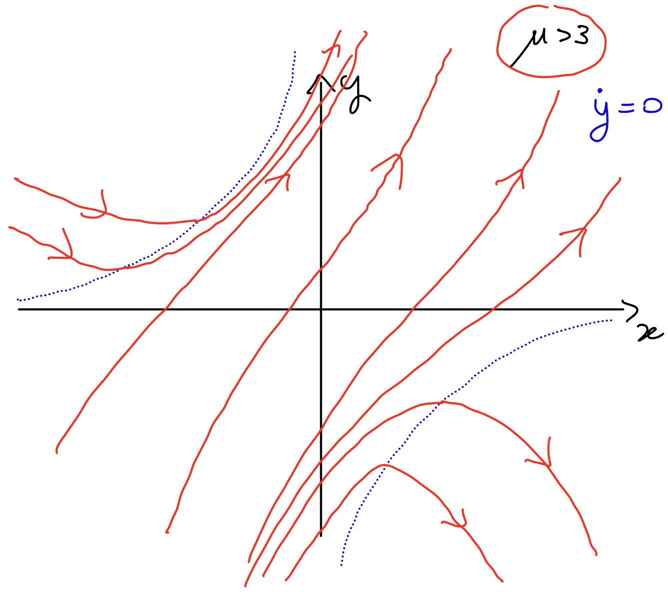
$\mu\in(-\infty,\frac{3}{2})$



$\mu=\frac{3}{2}$







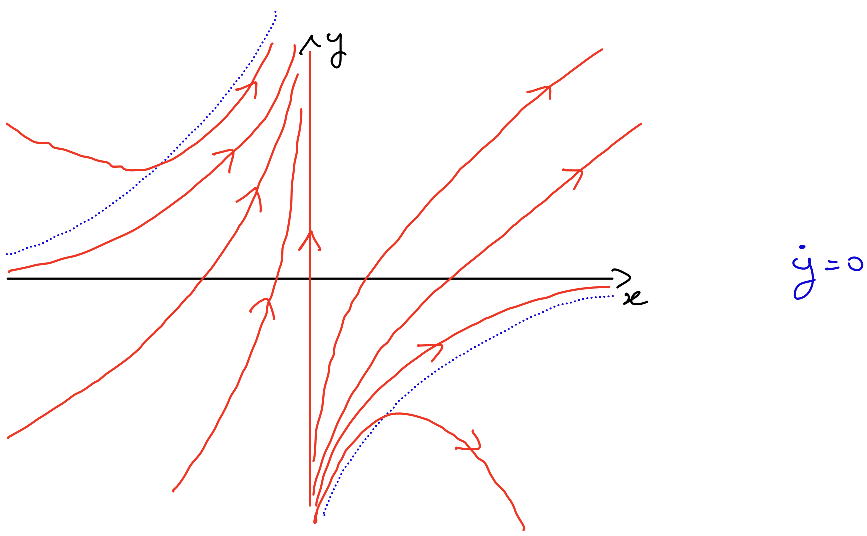
$\boxed{(b)}$ $\mu = 3$.

Sia $I(x,y) = ax - \frac{3}{2} x^{-1} - y$, $a \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\dot I\big|_{\{I=c\}}(x,y) = \left(a + \frac{3}{2} x^{-2}\right)\dot x - \dot y\,\Big|_{y = ax - \frac{3}{2}x^{-1} - c} = ax^2 + \frac{3}{2} - x\left(ax - \frac{3}{2}x^{-1} - c\right) - 3 =$$

$$= cx$$

Quindi $\dot I\big|_{\{I=c\}} \equiv 0$ per $c = 0$ e $\forall a \in \mathbb{R}$. Troviamo quindi che sono invarianti le curve $y = ax - \frac{3}{2}x^{-1}$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Queste curve generano tutte le orbite, tranne la retta invariante $x = 0$.



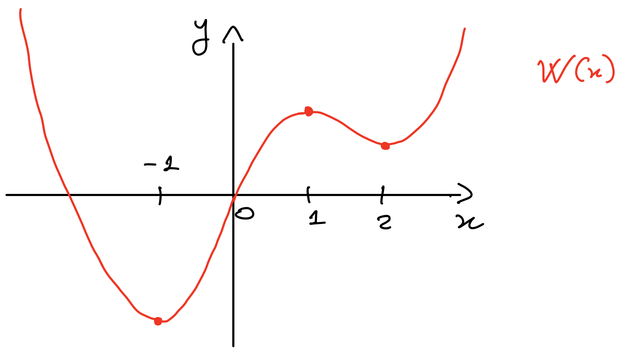
$\boxed{\text{ESERCIZIO } 2}$

$$\begin{cases} \dot x = 4y^3 \\ \dot y = -(x+1)(x-1)(x-2) \end{cases}$$

(a) Il sistema è hamiltoniano con $H(x,y) = y^4 + W(x)$ dove
$$W'(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$$
Si ha $W'(x) = 0 \iff x \in \{-1, 1, 2\}$, che implica che ci sono tre punti fissi per il sistema, $P_1 = (-1,0)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (2,0)$.

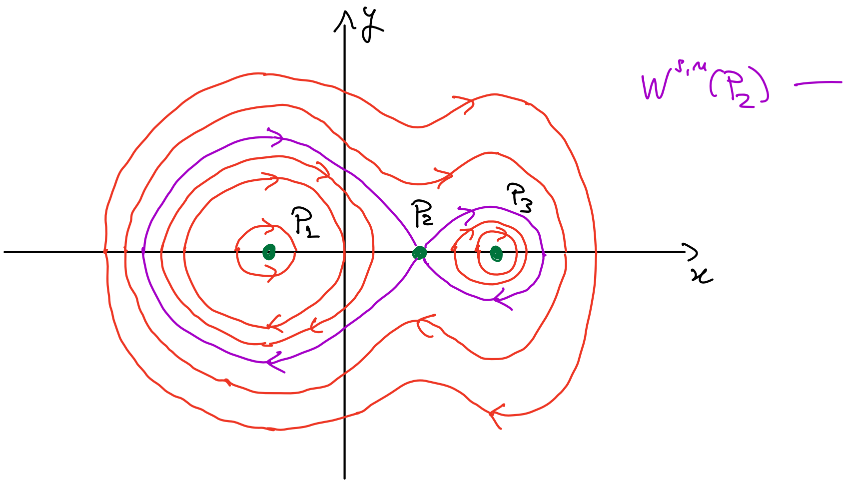
Inoltre, studiando il segno di W', otteniamo che -1 e 2 sono punti di minimo locale per W, e 1 è un punto di massimo locale. Quindi P_1 e P_3 sono centri del sistema, mentre P_2 è una sella.

Per avere informazioni più precise, usando $W'(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, scriviamo
$$W(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$$
da cui $W(-1) = -\frac{19}{12}$, $W(1) = \frac{13}{12}$, $W(2) = \frac{2}{3}$, e il grafico di W è



Il sistema ammette la simmetria standard dei sistemi hamiltoniani, $S(x,y) = (x,-y)$, essendo $JS(F(x,y)) = (4y^3, (x+1)(x-1)(x-2)) = -F(S(x,y))$.

Si ottiene il seguente ritratto di fase



(b) Consideriamo $x^* := \inf \{ x_0 \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}} x(t,(x_0,0)) \leq 1 \}$. Si tratta di consideriamo le condizioni iniziali $(x_0, 0)$ le cui orbite resta sempre a sinistra della retta $x=1$, al più toccandola. Dal ritratto di fase, si vede che questa proprietà è soddisfatta dalle orbite che sono racchiuse dall'orbita omoclina a P_2 che si trova nel semipiano $\{x \leq 1\}$, e dall'orbita omoclina stessa. In effetti l'orbita omoclina è quella che ha condizione iniziale $(x_0, 0)$ con x_0 minore. Quindi x^* si può trovare come soluzione del problema

$$H(x^*, 0) = H(P_2), \qquad x^* < 1.$$

Si ha $H(x,0) = H(P_2) \iff W(x) = W(1) \iff \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x = \frac{13}{12}$

$\iff 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 13 = 0.$

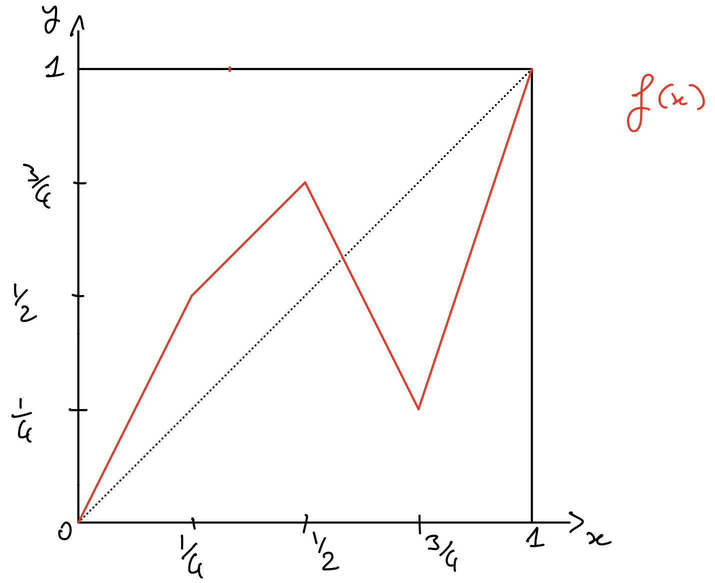
Dal grafico di W, deduciamo che $W(x) = W(1)$ ha tre soluzioni, e anche che 1 deve essere soluzione doppia. Infatti $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 13 = (x-1)^2(3x^2 - 2x - 13)$.

Quindi $W(x) = W(1) \iff x \in \left\{ 1, \frac{1+2\sqrt{10}}{3}, \frac{1-2\sqrt{10}}{3} \right\}$, e

$$\boxed{x^* = \frac{1-2\sqrt{10}}{3}}$$

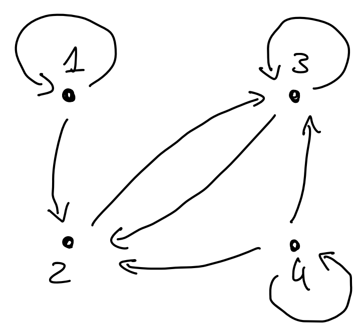
ESERCIZIO 3

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in J_1 = [0, 1/4] \\ x + 1/4, & x \in J_2 = [1/4, 1/2] \\ \frac{7}{4} - 2x, & x \in J_3 = [1/2, 3/4] \\ 3x - 2 & x \in J_4 = [3/4, 1] \end{cases}$$



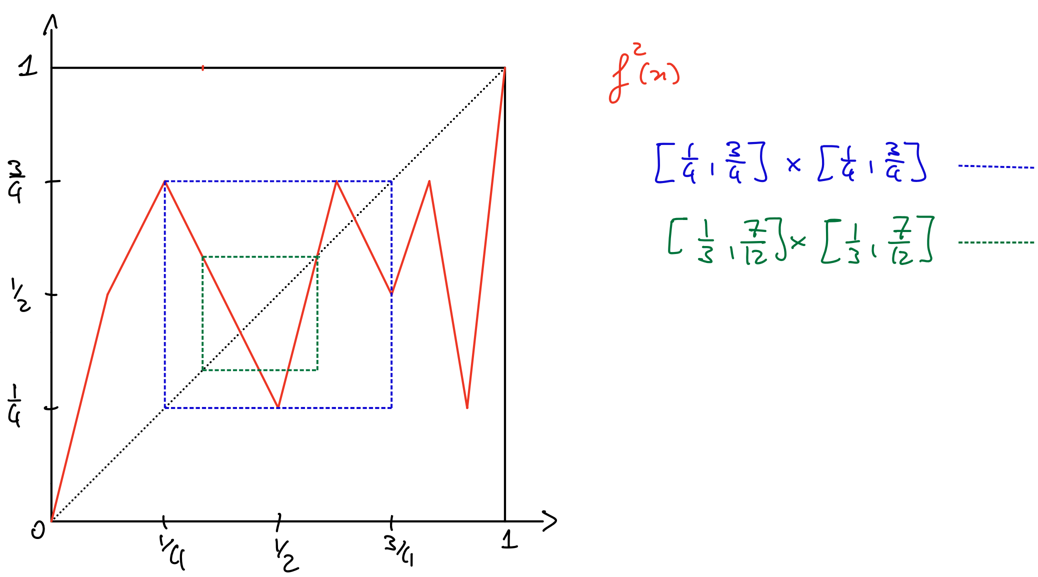
(a) Per costruire l'f-grafo di J, usiamo

$f(J_1) = J_1 \cup J_2$, $f(J_2) = J_3$, $f(J_3) = J_2 \cup J_3$, $f(J_4) = J_2 \cup J_3 \cup J_4$



(b) Osserviamo che nell'f-grafo di J, un cammino ammissibile è $J_2 J_3 J_3 J_2$, esiste quindi un'orbita di periodo 3. Inoltre, se per quest'orbita il periodo minimo non fosse 3, dovrebbe essere 1. Quindi sarebbe un punto fisso $\bar{x} \in J_2 \cap J_3$.
Ma $J_2 \cap J_3 = \{1/2\}$ che non è fisso.
Quindi f è una funzione continua di $[0,1]$ in sé con un'orbita periodica di periodo minimo 3, e per il Teorema di Sharkovski, f ammette orbite periodiche di periodo minimo n $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Costruiamo il grafico di f^2.



Ci sono due modi per trovare un ferro di cavallo per f^2.
La prima possibilità è usare l'orbita di periodo 3 per f data da $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$. Un risultato generale ci dice che $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ ricopre sé stesso almeno due volte.
L'altra possibilità è usare il punto fisso di f diverso da 0 e 1. La funzione f

ha un punto fisso in J_3, detto del punto $\bar{x} = \frac{7}{12}$. Troviamo $\bar{y} \in (0, \bar{x})$ tale che $f(\bar{y}) = \bar{x}$, si ha $\bar{y} = \frac{1}{3}$. Consideriamo $[\frac{1}{3}, \frac{7}{12}]$. Si ha $f^2(\frac{1}{3}) = f^2(\frac{7}{12}) = \frac{7}{12}$, inoltre $f^2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$, e poiché $\frac{1}{2} \in [\frac{1}{3}, \frac{7}{12}]$, abbiamo che $[\frac{1}{3}, \frac{7}{12}]$ ricopre sé stesso almeno due volte.