

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

30 giugno 2026

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=790975

30 giugno 2026

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=790975

PARTE A

1. Il minimo e il massimo della funzione $f(x) = x \ln(x)$ per $x \in]2, 3]$ sono

A: N.A. B: $\min = N.E.$, $\max = 1$ C: $\min = N.E.$, $\max = \ln(27)$ D: $\min = \ln(4)$, $\max = N.E.$, E: $\min = 2 \ln(2)$, $\max = 3 \ln(3)$

2. Il numero complesso $\frac{e^{i\pi} + e^{-i\pi}}{1+i}$ vale

A: $-2i$ B: N.A. C: 0 D: $1 - i$ E: $-1 + i$

3. L'integrale

$$\int_0^{\pi} \cos(x) \cos(\sin(x)) dx,$$

vale

A: N.E. B: -1 C: $\sin(1)$ D: N.A. E: 0

4. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) \sin(\ln(x))$$

vale

A: $+\infty$ B: N.A. C: 1 D: 0 E: N.E.

5. L'integrale

$$\int_1^{+\infty} x e^{-2x} dx$$

vale

A: $+\infty$ B: $1 + e^{-1}$ C: $\ln(2 + e^3)$ D: 1 E: N.A.

6. Il numero di soluzioni complesse del sistema $\{|z + 1| = 1$ e $Re(z) + Im(z) = 2\}$ è

A: 1 B: 0 C: 3 D: infinito E: N.A.

7. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = \frac{|x|}{x^2 + 1} : \text{con } x \in [-2, 2] \right\},$$

valgono

A: N.A. B: $\{0, 0, 1/2, 1/2\}$ C: $\{-2, -2, 2, 2\}$ D: $\{-2, N.E., 2, N.E.\}$ E: $\{0, N.E., 1, N.E.\}$

8. La funzione $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{|x|^2}{\arctan(x)}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è

A: positiva B: derivabile in $x = 0$ C: limitata per $x \rightarrow \pm\infty$ D: N.A. E: non continua in $x = 0$

9. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=17}^{+\infty} \frac{\pi^n}{n^\pi} (x+1)^n$$

vale

A: N.A. B: $R = +\infty$ C: $R = \pi$ D: $R = 1/\pi$ E: $R = \pi^2$

10. La retta tangente al grafico di $y(x) = \log_5(x-1)$ nel punto $x_0 = 2$ è

A: N.A. B: $1 + \log_5(5)(x-2)$ C: $1 + \log_5(x-2)$ D: $\frac{x-2}{\ln(5)}$ E: $x-2$

CODICE=790975

CODICE=790975

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

30 giugno 2026

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=002419

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

30 giugno 2026

(Cognome)																			

(Nome)																			

(Numero di matricola)																			

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐	☐
10	☐	☐	☐	☐	☐

CODICE=002419

PARTE A

1. L'integrale

$$\int_0^{\pi} \cos(x) \cos(\sin(x)) dx,$$

vale

A: $\sin(1)$ B: N.E. C: N.A. D: 0 E: -1

2. Il minimo e il massimo della funzione $f(x) = x \ln(x)$ per $x \in]2, 3]$ sono

A: $\min = N.E.$, $\max = \ln(27)$ B: $\min = 2 \ln(2)$, $\max = 3 \ln(3)$ C: $\min = \ln(4)$, $\max = N.E.$, D: $\min = N.E.$, $\max = 1$ E: N.A.

3. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=17}^{+\infty} \frac{\pi^n}{n^\pi} (x+1)^n$$

vale

A: $R = +\infty$ B: $R = 1/\pi$ C: $R = \pi$ D: $R = \pi^2$ E: N.A.

4. Il numero di soluzioni complesse del sistema $\{|z+1| = 1$ e $Re(z) + Im(z) = 2\}$ è

A: 0 B: N.A. C: 3 D: 1 E: infinito

5. La retta tangente al grafico di $y(x) = \log_5(x-1)$ nel punto $x_0 = 2$ è

A: $x-2$ B: $1 + \log_5(x-2)$ C: N.A. D: $\frac{x-2}{\ln(5)}$ E: $1 + \log_5(5)(x-2)$

6. La funzione $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{|x|^2}{\arctan(x)}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è

A: derivabile in $x = 0$ B: N.A. C: non continua in $x = 0$ D: limitata per $x \rightarrow \pm\infty$
E: positiva

7. Il numero complesso $\frac{e^{i\pi} + e^{-i\pi}}{1+i}$ vale

A: $-1+i$ B: N.A. C: $1-i$ D: 0 E: $-2i$

8. L'integrale

$$\int_1^{+\infty} x e^{-2x} dx$$

vale

A: N.A. B: $+\infty$ C: 1 D: $\ln(2 + e^3)$ E: $1 + e^{-1}$

9. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = \frac{|x|}{x^2 + 1} : \text{ con } x \in [-2, 2] \right\},$$

valgono

A: N.A. B: $\{-2, N.E., 2, N.E.\}$ C: $\{0, 0, 1/2, 1/2\}$ D: $\{-2, -2, 2, 2\}$ E: $\{0, N.E., 1, N.E.\}$

10. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) \sin(\ln(x))$$

vale

A: $+\infty$ B: 0 C: 1 D: N.E. E: N.A.

CODICE=002419

CODICE=002419

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

30 giugno 2026

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=865294

30 giugno 2026

(Nome)

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

CODICE=865294

PARTE A

1. La retta tangente al grafico di $y(x) = \log_5(x-1)$ nel punto $x_0 = 2$ è

A: $\frac{x-2}{\ln(5)}$ B: $1 + \log_5(5)(x-2)$ C: N.A. D: $1 + \log_5(x-2)$ E: $x-2$

2. L'integrale

$$\int_0^\pi \cos(x) \cos(\sin(x)) dx,$$

vale

A: $\sin(1)$ B: N.E. C: 0 D: N.A. E: -1

3. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = \frac{|x|}{x^2 + 1} : \text{con } x \in [-2, 2] \right\},$$

valgono

A: $\{-2, N.E., 2, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{0, 0, 1/2, 1/2\}$ D: $\{-2, -2, 2, 2\}$ E: $\{0, N.E., 1, N.E.\}$

4. Il numero di soluzioni complesse del sistema $\{|z+1| = 1$ e $Re(z) + Im(z) = 2\}$ è

A: N.A. B: infinito C: 1 D: 0 E: 3

5. L'integrale

$$\int_1^{+\infty} x e^{-2x} dx$$

vale

A: 1 B: N.A. C: $\ln(2 + e^3)$ D: $+\infty$ E: $1 + e^{-1}$

6. La funzione $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{|x|^2}{\arctan(x)}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è

A: positiva B: non continua in $x = 0$ C: derivabile in $x = 0$ D: N.A. E: limitata per $x \rightarrow \pm\infty$

7. Il minimo e il massimo della funzione $f(x) = x \ln(x)$ per $x \in [2, 3]$ sono

A: $\min = 2 \ln(2)$, $\max = 3 \ln(3)$ B: $\min = N.E.$, $\max = \ln(27)$ C: $\min = \ln(4)$, $\max = N.E.$, D: $\min = N.E.$, $\max = 1$ E: N.A.

8. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) \sin(\ln(x))$$

vale

A: N.E. B: $+\infty$ C: 1 D: N.A. E: 0

9. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=17}^{+\infty} \frac{\pi^n}{n^\pi} (x+1)^n$$

vale

A: $R = \pi$ B: $R = \pi^2$ C: $R = +\infty$ D: N.A. E: $R = 1/\pi$

10. Il numero complesso $\frac{e^{i\pi} + e^{-i\pi}}{1+i}$ vale

A: $-2i$ B: $-1+i$ C: 0 D: $1-i$ E: N.A.

CODICE=865294

CODICE=865294

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

30 giugno 2026

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=384371

30 giugno 2026

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=384371

PARTE A

1. La funzione $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{|x|^2}{\arctan(x)}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è
A: non continua in $x = 0$ B: positiva C: N.A. D: limitata per $x \rightarrow \pm\infty$ E: derivabile in $x = 0$

2. La retta tangente al grafico di $y(x) = \log_5(x - 1)$ nel punto $x_0 = 2$ è
A: $\frac{x-2}{\ln(5)}$ B: N.A. C: $x - 2$ D: $1 + \log_5(x - 2)$ E: $1 + \log_5(5)(x - 2)$

3. L'integrale

$$\int_1^{+\infty} x e^{-2x} dx$$

vale

- A: N.A. B: $\ln(2 + e^3)$ C: $+\infty$ D: $1 + e^{-1}$ E: 1

4. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = \frac{|x|}{x^2 + 1} : \text{ con } x \in [-2, 2] \right\},$$

valgono

- A: $\{0, N.E., 1, N.E.\}$ B: $\{0, 0, 1/2, 1/2\}$ C: N.A. D: $\{-2, -2, 2, 2\}$ E: $\{-2, N.E., 2, N.E.\}$

5. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=17}^{+\infty} \frac{\pi^n}{n^\pi} (x + 1)^n$$

vale

- A: N.A. B: $R = +\infty$ C: $R = \pi$ D: $R = \pi^2$ E: $R = 1/\pi$

6. Il numero complesso $\frac{e^{i\pi} + e^{-i\pi}}{1+i}$ vale

- A: $1 - i$ B: $-2i$ C: 0 D: N.A. E: $-1 + i$

7. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) \sin(\ln(x))$$

vale

- A: 1 B: $+\infty$ C: N.A. D: 0 E: N.E.

8. Il minimo e il massimo della funzione $f(x) = x \ln(x)$ per $x \in]2, 3]$ sono

- A: min = N.E., max = $\ln(27)$ B: min = N.E., max = 1 C: min = $\ln(4)$, max = N.E.,
D: N.A. E: min = $2 \ln(2)$, max = $3 \ln(3)$

9. L'integrale

$$\int_0^\pi \cos(x) \cos(\sin(x)) dx,$$

vale

- A: -1 B: 0 C: N.E. D: $\sin(1)$ E: N.A.

10. Il numero di soluzioni complesse del sistema $\{|z + 1| = 1$ e $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 2\}$ è

- A: 0 B: 3 C: 1 D: infinito E: N.A.

CODICE=384371

CODICE=384371

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

30 giugno 2026

(Cognome)																			

(Nome)																			

(Numero di matricola)																			

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	☐	☐	☒	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☒
3	☐	☐	☐	☐	☒
4	☐	☐	☐	☒	☐
5	☐	☐	☐	☐	☒
6	☐	☒	☐	☐	☐
7	☐	☒	☐	☐	☐
8	☐	☒	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☒	☐
10	☐	☐	☐	☒	☐

CODICE=790975

CODICE=790975

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

30 giugno 2026

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Cognome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Nome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	☐	☐	☐	☒	☐
2	☒	☐	☐	☐	☐
3	☐	☒	☐	☐	☐
4	☒	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☒	☐
6	☒	☐	☐	☐	☐
7	☒	☐	☐	☐	☐
8	☒	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☒	☐	☐
10	☐	☒	☐	☐	☐

CODICE=002419

CODICE=002419

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

30 giugno 2026

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Cognome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Nome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	☒	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☒	☐	☐
3	☐	☐	☒	☐	☐
4	☐	☐	☐	☒	☐
5	☐	☒	☐	☐	☐
6	☐	☐	☒	☐	☐
7	☐	☒	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐	☒
9	☐	☐	☐	☐	☒
10	☐	☒	☐	☐	☐

CODICE=865294

CODICE=865294

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

30 giugno 2026

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Cognome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Nome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	☐	☐	☐	☐	☒
2	☒	☐	☐	☐	☐
3	☒	☐	☐	☐	☐
4	☐	☒	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☒
6	☐	☐	☐	☐	☒
7	☐	☐	☐	☒	☐
8	☒	☐	☐	☐	☐
9	☐	☒	☐	☐	☐
10	☒	☐	☐	☐	☐

CODICE=384371

CODICE=384371

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

30 giugno 2026

1 Sia

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x) & \text{se } x < 0 \\ \cos(x^2) & \text{se } 0 \leq x \leq \sqrt{2\pi} \\ \ln(x) & \text{se } \sqrt{2\pi} < x \end{cases}$$

Studiare la continuità e derivabilità della funzione.

Determinare il numero di soluzioni di $f(x) = c$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Soluzione La funzione è regolare (continua e derivabile) sicuramente per $x \neq 0, \sqrt{2\pi}$. In tali punti la funzione non è continua dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{2\pi}^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow \sqrt{2\pi}^+} f(x) = \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

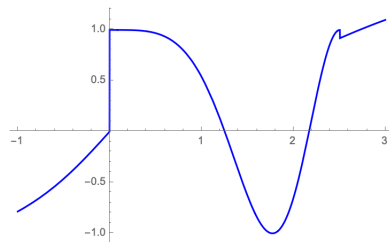
Osserviamo che $\frac{1}{2} \ln(2\pi) < 1$, dato che è equivalente a $\ln(2\pi) < 2$ o anche $2\pi < e^2$ e $2\pi \sim 6.28 \dots$, mentre $e^2 > 2, 7^2 = 7.29$.

Dallo studio della derivata otteniamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & x < 0 \\ -2x \sin(x^2) & 0 < x < \sqrt{2\pi} \\ \frac{1}{x} & \sqrt{2\pi} < x \\ N.E. & x = 0, \sqrt{2\pi} \end{cases}$$

Osserviamo quindi che la funzione è strettamente crescente per $x < 0$, per $\sqrt{\pi} < x < \sqrt{2\pi}$ e per $x > \sqrt{2\pi}$ (tra 0 e $\sqrt{2\pi}$ la funzione effettua esattamente una oscillazione tra 1 e -1 come $\cos(x)$).

Dai limiti agli estremi del dominio otteniamo il seguente grafico



Pertanto le intersezioni con le rette orizzontali, soluzioni di $f(x) = c$ sono

1 se $c > 1$

3 se $\sqrt{2\pi} < c \leq 1$

2 se $0 \leq c \leq \sqrt{2\pi}$

3 se $-1 < c < 0$

2 se $c = -1$

1 se $-\pi/2 < c < -1$

0 se $c \leq -\pi/2$

2 Studiare la convergenza delle seguenti serie al variare di $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1 + \sin(n^{-\alpha}))}{\sqrt{n}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1 + \cos(n^{-\alpha}))}{n^2}$$

Soluzione. La prima serie è a termini definitivamente non-negativi e si comporta asintoticamente come segue

$$\frac{\ln(1 + \sin(n^{-\alpha}))}{\sqrt{n}} = \mathcal{O}\left(\frac{\sin(n^{-\alpha})}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{1/2+\alpha}}\right)$$

e quindi converge se e solo se $\alpha > 1/2$.

La seconda si comporta per n grandi come $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2)}{n^2}$ dato che $\cos(n^{-\alpha}) \rightarrow 1$ e quindi è definitivamente a segno costante e convergente.

3 Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \ln(n)}{n+2} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^{n+1}} dx$$

Soluzione. Per calcolare il limite la prima cosa da fare è calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^{n+1}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x^n e^{-x^{n+1}} dx = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} e^{-x^{n+1}} \Big|_1^b = \frac{1}{n+1}.$$

Il limite diventa quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \ln(n)}{n+2} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^{n+1}} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \ln(n)}{(n+1)(n+2)},$$

e, usando i limiti notevoli, si ha facilmente che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \ln(n)}{n+2} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^{n+1}} dx = 1.$$

4 Sia $a_n \geq 0$ una successione crescente. Sia poi per $n \in \mathbb{N}$ definita la successione $A_n := \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Dimostrare che

a) $A_n \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Anche A_n è crescente.

Soluzione. Per il primo punto osserviamo che dato che $a_n \leq a_{n+1}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha anche che $a_k \leq a_n$ per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ e dunque

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \frac{a_n + a_n + \dots + a_n}{n} = a_n.$$

Per il secondo punto intanto scriviamo A_{n+1} in termini di A_n come segue

$$A_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} = \frac{n \cdot A_n + a_{n+1}}{n+1}$$

Studiamo ora la differenza $A_{n+1} - A_n$ e vediamo se risulta non-negativa come richiesto.

$$A_{n+1} - A_n = \frac{n \cdot A_n + a_{n+1}}{n+1} - A_n$$

e sostituendo l'espressione per A_n si ottiene

$$A_{n+1} - A_n = \frac{a_{n+1} - A_n}{n+1}.$$

Il denominatore $(n+1)$ è chiaramente sempre positivo. Quindi, il segno della differenza dipende esclusivamente dal numeratore che abbiamo già visto al passo 1) essere non-negativo, dato che $A_n \leq a_n \leq a_{n+1}$, ancora per la crescita di a_n .