

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

20 luglio 2026

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=271221

20 luglio 2026

(Numero di matricola)

1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

CODICE=271221

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = (x^2 + e)^{-1/2} : \text{ con } x \in \mathbb{R} \right\},$$

vale

A: $\{0, N.E., 1/\sqrt{e}, 1/\sqrt{e}\}$ B: $\{\sqrt{e}, \sqrt{e}, +\infty, N.E.\}$ C: N.A. D: $\{1/\sqrt{e}, 1/\sqrt{e}, +\infty, N.E.\}$
E: $\{0, 0, 1, N.E.\}$

2. L'integrale

$$\int_{-1/n}^{1/n} e^{-nx} dx, \quad \text{con } n \in \mathbb{N},$$

vale

A: e/n B: N.A. C: $e^2 - 1$ D: $-ne$ E: $\frac{e^2-1}{en}$

3. Il minimo e il massimo della funzione $f(x) = x^2 \ln(x)$ per $x \in]0, 1]$ sono

A: $\min = -\frac{1}{2e}$, $\max = 0$ B: $\min = 0$, $\max = 1/2e$, C: $\min = N.E.$, $\max = 0$ D:
 $\min = 0$, $\max = 1$ E: N.A.

4. L'integrale

$$\int_1^e \frac{1}{(\ln^2(x) + 1)} \frac{1}{x} dx$$

vale

A: 1 B: $\arctan(0)$ C: $+\infty$ D: $\pi/4$ E: $\frac{\ln(3)}{3}$

5. La funzione $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è

A: crescente B: derivabile in $x = 0$ C: N.A. D: iniettiva E: non continua in $x = 0$

6. Il numero complesso $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$ vale

A: 0 B: $-i$ C: N.A. D: -1 E: i

7. La retta tangente al grafico di $y(x) = \cos(x-1)$ nel punto $x_0 = 1$ è

A: $1 - \frac{(x-1)^2}{2}$ B: N.A. C: 1 D: $\cos(1) - (x-1)\sin(1)$ E: $x-1$

8. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\ln(\ln(x))}$$

vale

A: 0 B: $+\infty$ C: N.A. D: N.E. E: 1

9. Il numero di soluzioni complesse di $\frac{|z|^2+1}{z} = 0$ è

A: N.A. B: 1 C: 0 D: 2 E: 3

10. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^{(n^2)}}{n^2+1} x^n$$

vale

A: $R = 4/3$ B: $R = 0$ C: $R = +\infty$ D: $R = 1$ E: N.A.

CODICE=271221

CODICE=271221

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

20 luglio 2026

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=711132

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

20 luglio 2026

(Cognome)																			

(Nome)																			

(Numero di matricola)																			

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐	☐
10	☐	☐	☐	☐	☐

CODICE=711132

PARTE A

1. Il numero di soluzioni complesse di $\frac{|z|^2+1}{z} = 0$ è

A: 0 B: 3 C: 2 D: N.A. E: 1

2. Il numero complesso $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$ vale

A: -1 B: 0 C: $-i$ D: N.A. E: i

3. L'integrale

$$\int_1^e \frac{1}{(\ln^2(x) + 1)} \frac{1}{x} dx$$

vale

A: $\pi/4$ B: 1 C: $+\infty$ D: $\frac{\ln(3)}{3}$ E: $\arctan(0)$

4. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = (x^2 + e)^{-1/2} : \text{ con } x \in \mathbb{R} \right\},$$

valgono

A: $\{0, 0, 1, N.E.\}$ B: $\{1/\sqrt{e}, 1/\sqrt{e}, +\infty, N.E.\}$ C: $\{0, N.E., 1/\sqrt{e}, 1/\sqrt{e}\}$ D: $\{\sqrt{e}, \sqrt{e}, +\infty, N.E.\}$
E: N.A.

5. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\ln(\ln(x))}$$

vale

A: 1 B: N.A. C: $+\infty$ D: 0 E: N.E.

6. La funzione $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è

A: crescente B: derivabile in $x = 0$ C: N.A. D: non continua in $x = 0$ E: iniettiva

7. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n^2)}{n^2 + 1} x^n$$

vale

A: $R = 1$ B: $R = 0$ C: $R = 4/3$ D: N.A. E: $R = +\infty$

8. La retta tangente al grafico di $y(x) = \cos(x-1)$ nel punto $x_0 = 1$ è

A: 1 B: N.A. C: $1 - \frac{(x-1)^2}{2}$ D: $x-1$ E: $\cos(1) - (x-1)\sin(1)$

9. Il minimo e il massimo della funzione $f(x) = x^2 \ln(x)$ per $x \in]0, 1]$ sono

A: $\min = -\frac{1}{2e}$, $\max = 0$ B: N.A. C: $\min = 0$, $\max = 1/2e$, D: $\min = 0$, $\max = 1$ E:
 $\min = N.E.$, $\max = 0$

10. L'integrale

$$\int_{-1/n}^{1/n} e^{-nx} dx, \quad \text{con } n \in \mathbb{N},$$

vale

A: $\frac{e^2-1}{en}$ B: N.A. C: $-ne$ D: e/n E: $e^2 - 1$

CODICE=711132

CODICE=711132

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

20 luglio 2026

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=166966

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

20 luglio 2026

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Cognome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Nome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐	☐
10	☐	☐	☐	☐	☐

CODICE=166966

PARTE A

1. L'integrale

$$\int_{-1/n}^{1/n} e^{-nx} dx, \quad \text{con } n \in \mathbb{N},$$

vale

A: $e^2 - 1$ B: N.A. C: e/n D: $\frac{e^2-1}{en}$ E: $-ne$

2. Il minimo e il massimo della funzione $f(x) = x^2 \ln(x)$ per $x \in]0, 1]$ sono

A: $\min = 0, \max = 1/2e$, B: N.A. C: $\min = N.E., \max = 0$ D: $\min = -\frac{1}{2e}, \max = 0$
E: $\min = 0, \max = 1$

3. Il numero di soluzioni complesse di $\frac{|z|^2+1}{z} = 0$ è

A: 3 B: 1 C: 0 D: N.A. E: 2

4. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\ln(\ln(x))}$$

vale

A: $+\infty$ B: 1 C: N.A. D: N.E. E: 0

5. La funzione $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è

A: N.A. B: derivabile in $x = 0$ C: non continua in $x = 0$ D: crescente E: iniettiva

6. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^{(n^2)}}{n^2+1} x^n$$

vale

A: $R = +\infty$ B: $R = 4/3$ C: N.A. D: $R = 1$ E: $R = 0$

7. La retta tangente al grafico di $y(x) = \cos(x-1)$ nel punto $x_0 = 1$ è

A: N.A. B: $1 - \frac{(x-1)^2}{2}$ C: 1 D: $\cos(1) - (x-1)\sin(1)$ E: $x-1$

8. L'integrale

$$\int_1^e \frac{1}{(\ln^2(x)+1)} \frac{1}{x} dx$$

vale

A: $+\infty$ B: $\pi/4$ C: $\frac{\ln(3)}{3}$ D: $\arctan(0)$ E: 1

9. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = (x^2 + e)^{-1/2} : \quad \text{con } x \in \mathbb{R} \right\},$$

valgono

A: N.A. B: $\{0, N.E., 1/\sqrt{e}, 1/\sqrt{e}\}$ C: $\{1/\sqrt{e}, 1/\sqrt{e}, +\infty, N.E.\}$ D: $\{\sqrt{e}, \sqrt{e}, +\infty, N.E.\}$
E: $\{0, 0, 1, N.E.\}$

10. Il numero complesso $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$ vale

A: -1 B: $-i$ C: 0 D: N.A. E: i

CODICE=166966

CODICE=166966

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

20 luglio 2026

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=374965

20 luglio 2026

(Numero di matricola)

1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

CODICE=374965

PARTE A

1. La funzione $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è
A: derivabile in $x = 0$ B: iniettiva C: non continua in $x = 0$ D: crescente E: N.A.
2. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n^2)}{n^2+1} x^n$$

vale

A: $R = 4/3$ B: $R = +\infty$ C: N.A. D: $R = 1$ E: $R = 0$

3. Il numero complesso $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$ vale

A: -1 B: N.A. C: i D: 0 E: $-i$

4. Il minimo e il massimo della funzione $f(x) = x^2 \ln(x)$ per $x \in]0, 1]$ sono

A: $\min = 0, \max = 1$ B: $\min = 0, \max = 1/2e$, C: N.A. D: $\min = N.E., \max = 0$
E: $\min = -\frac{1}{2e}, \max = 0$

5. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = (x^2 + e)^{-1/2} : \text{ con } x \in \mathbb{R} \right\},$$

valgono

A: $\{1/\sqrt{e}, 1/\sqrt{e}, +\infty, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{\sqrt{e}, \sqrt{e}, +\infty, N.E.\}$ D: $\{0, N.E., 1/\sqrt{e}, 1/\sqrt{e}\}$
E: $\{0, 0, 1, N.E.\}$

6. La retta tangente al grafico di $y(x) = \cos(x-1)$ nel punto $x_0 = 1$ è

A: 1 B: $1 - \frac{(x-1)^2}{2}$ C: N.A. D: $\cos(1) - (x-1)\sin(1)$ E: $x-1$

7. Il numero di soluzioni complesse di $\frac{|z|^2+1}{z} = 0$ è

A: 3 B: 0 C: 2 D: 1 E: N.A.

8. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\ln(\ln(x))}$$

vale

A: N.E. B: 1 C: 0 D: $+\infty$ E: N.A.

9. L'integrale

$$\int_{-1/n}^{1/n} e^{-nx} dx, \quad \text{con } n \in \mathbb{N},$$

vale

A: N.A. B: $e^2 - 1$ C: $\frac{e^2-1}{en}$ D: e/n E: $-ne$

10. L'integrale

$$\int_1^e \frac{1}{(\ln^2(x) + 1)} \frac{1}{x} dx$$

vale

A: $+\infty$ B: $\arctan(0)$ C: $\pi/4$ D: $\frac{\ln(3)}{3}$ E: 1

CODICE=374965

CODICE=374965

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

20 luglio 2026

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Cognome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Nome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	☒	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☒
3	☒	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☒	☐
5	☐	☒	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☒
7	☐	☐	☒	☐	☐
8	☒	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☒	☐	☐
10	☐	☒	☐	☐	☐

CODICE=271221

CODICE=271221

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

20 luglio 2026

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Cognome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Nome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	☒	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☒
3	☒	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☒	☐	☐
5	☐	☐	☐	☒	☐
6	☐	☒	☐	☐	☐
7	☐	☒	☐	☐	☐
8	☒	☐	☐	☐	☐
9	☒	☐	☐	☐	☐
10	☒	☐	☐	☐	☐

CODICE=711132

CODICE=711132

20 luglio 2026

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

CODICE=166966

CODICE=166966

20 luglio 2026

(Numero di matricola)

1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

CODICE=374965

CODICE=374965

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

20 luglio 2026

1 Sia per $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^3 - \lambda x$$

Determinare se esistono valori $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che la funzione f abbia in $x = 0$ un flesso che forma un angolo di $\pi/4$ con asse delle x .

Determinare per quali valori di λ la corda che unisce eventuali punti del grafico $P = (x, f(x))$ corrispondenti a punti di massimo o minimo relativo ha coefficiente angolare uguale a -1 .

Determinare poi per quali valori di λ la porzione di piano finita nel IV quadrante, delimitata dal grafico della funzione e dall'asse delle x ha valore uguale a 1.

Soluzione. Affinché f abbia in $x = 0$ un flesso che forma un angolo di $\pi/4$ con l'asse delle ascisse, deve valere $f''(0) = 0$ (condizione necessaria per il flesso) con cambio di segno della derivata seconda (che è una condizione sufficiente) Calcolando le derivate

$$f'(x) = 3x^2 - \lambda, \quad f''(x) = 6x$$

Poiché $f''(0) = 0$, $x = 0$ e c'è cambio di segno per $x = 0$ esso è un punto di flesso (ed è flesso a tangente obliqua per $\lambda \neq 0$). Imponendo la condizione sulla pendenza della tangente:

$$f'(0) = -\lambda = 1 \implies \lambda = -1.$$

I punti di massimo e minimo relativo si trovano ponendo $f'(x) = 0 \implies 3x^2 - \lambda = 0$.

Affinché esistano punti stazionari distinti, deve essere $\lambda > 0$. Le ascisse sono $x_1 = -\sqrt{\frac{\lambda}{3}}$

(ascissa di pt. di massimo) e $x_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{3}}$ (ascissa di pt. di minimo) come si vede dallo studio

del segno di f' . Le coordinate dei punti sono $P_1 = \left(-\sqrt{\frac{\lambda}{3}}, \frac{2\lambda}{3}\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\right)$ e $P_2 = \left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}, -\frac{2\lambda}{3}\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\right)$.

Il coefficiente angolare della corda che li unisce è:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-\frac{4\lambda}{3}\sqrt{\frac{\lambda}{3}}}{2\sqrt{\frac{\lambda}{3}}} = -\frac{2\lambda}{3}$$

Imponendo $m = -1$, otteniamo $-\frac{2\lambda}{3} = -1 \implies \lambda = \frac{3}{2}$.

Cerchiamo l'area nel IV quadrante, quindi per $x \geq 0$. La funzione interseca l'asse x in $x = 0$ e $x = \sqrt{\lambda}$ (con $\lambda > 0$). Nell'intervallo $[0, \sqrt{\lambda}]$, si ha $f(x) \leq 0$ (siamo nel IV quadrante). L'area racchiusa è:

$$\mathcal{A} = \int_0^{\sqrt{\lambda}} |x^3 - \lambda x| dx = \int_0^{\sqrt{\lambda}} (\lambda x - x^3) dx = \left[\frac{\lambda x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{\lambda}} = \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^2}{4} = \frac{\lambda^2}{4}.$$

CODICE=374965

Ponendo $\mathcal{A} = 1$, si ottiene $\frac{\lambda^2}{4} = 1 \implies \lambda^2 = 4 \implies \lambda = 2$ (scartando $\lambda = -2$ poiché serve $\lambda > 0$).

2 Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^{\lambda^2-\lambda}} dx.$$

Soluzione. L'integrale è un integrale improprio della forma $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^p} dx$. Dato che il denominatore non si annulla mai per $x > 0$, esso converge se e solo se l'esponente al denominatore è strettamente maggiore di 1, ovvero se $p > 1$. Imponiamo quindi

$$\lambda^2 - \lambda > 1 \implies \lambda^2 - \lambda - 1 > 0,$$

L'equazione associata $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ ha radici:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La disequazione è soddisfatta per valori esterni all'intervallo delle radici. Pertanto, l'integrale converge per $\lambda \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ e diverge altrimenti.

3 Risolvere, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - y(x) = x^2 - 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale è lineare del primo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Risolviamo prima l'equazione omogenea associata $ny'(x) - y(x) = 0$. Il polinomio caratteristico associato è $\lambda - 1 = 0$ che ha come radici solo $\lambda = 1$. L'integrale generale dell'omogenea associata è quindi

$$y_h(x) = Ce^x$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare $y_p(x)$ dell'equazione completa. Poiché il termine noto è un polinomio di secondo grado e $\lambda = 0$ non è radice del polinomio caratteristico, la soluzione particolare avrà la forma di un generico polinomio di secondo grado

$$y_p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Sostituiamo $y_p(x)$ e $y'_p(x)$ nell'equazione di partenza e otteniamo

$$(2a_2x + a_1) - (a_2x^2 + a_1x + a_0) = x^2 - 1.$$

Riordinando e raggruppando i termini in base al grado di x , otteniamo

$$-a_2x^2 + (2a_2 - a_1)x + (a_1 - a_0) = x^2 - 1.$$

Per il principio di identità dei polinomi, uguagliamo i coefficienti dei termini di grado corrispondente

$$\begin{cases} -a_2 = 1 \\ 2a_2 - a_1 = 0 \\ a_1 - a_0 = -1, \end{cases}$$

e risolvendo il sistema lineare si ottiene

$$\begin{cases} a_2 = -1 \\ a_1 = 2a_2 = -2 \\ a_0 = a_1 + 1 = -1. \end{cases}$$

La soluzione particolare è quindi:

$$y_p(x) = -x^2 - 2x - 1 = -(x+1)^2.$$

L'integrale generale dell'equazione completa è la somma della soluzione dell'omogenea e della soluzione particolare:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^x - (x+1)^2.$$

Imponiamo infine la condizione iniziale del problema di Cauchy, $y(0) = 0$:

$$0 = Ce^0 - (0+1)^2 \implies 0 = C - 1 \implies C = 1.$$

La soluzione del problema di Cauchy è infine

$$y(x) = e^x - (x+1)^2.$$

4 Calcolare l'area della regione del piano complesso di Argand-Gauss definita da

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |Re(z)| + |Im(z)| \leq 2\}.$$

Soluzione. Ponendo $z = x + iy$, il dominio A è definito dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ |x| + |y| \leq 2. \end{cases}$$

La prima condizione descrive la regione esterna al disco unitario centrato nell'origine, la cui area è $\mathcal{A}_{\text{disco}} = \pi 1^2 = \pi$.

La seconda condizione descrive l'interno di un quadrato (di lato di lunghezza $2\sqrt{2}$) i cui vertici giacciono sugli assi nei quattro punti $(\pm 2, 0)$ e $(0, \pm 2)$. L'area di questo quadrato, è

$$\mathcal{A}_{\text{quadrato}} = (2\sqrt{2})^2 = 8.$$

La distanza minima dall'origine ai lati del quadrato (che son osulle rette di equazione $\pm x \pm y = 2$) è pari a $\sqrt{2}$. Poiché $\sqrt{2} > 1$, il disco unitario è interamente contenuto all'interno del quadrato. L'area della regione A è semplicemente la differenza tra l'area del quadrato e l'area del disco racchiuso

$$\text{Area}(A) = 8 - \pi.$$