

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 giugno 2026

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=811779

9 giugno 2026

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=811779

PARTE A

1. La funzione $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{x}{|x|} |\sin(x)|$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è
A: positiva B: derivabile in $x = 0$ C: iniettiva D: N.A. E: non continua in $x = 0$

2. Il numero complesso $\left(\frac{1+i}{e^{i\pi}}\right)^2$ vale
A: $2i$ B: 0 C: $-2i$ D: N.A. E: 1

3. L'integrale

$$\int_{-1/n}^{1/n} \sin(n^2 \pi x) dx, \quad \text{con } n \in \mathbb{N},$$

vale

- A: $1/n$ B: $\frac{2}{n^2\pi}$ C: $-1/n$ D: N.A. E: 0

4. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=17}^{+\infty} \frac{n^n}{n+1} (x - 2^{20})^n$$

vale

- A: $R = 0$ B: N.A. C: $R = +\infty$ D: $R = 1$ E: $R = 4/3$

5. Il minimo e il massimo della funzione $f(x) = x \arctan(x)$ per $x \in]-1, 1]$ sono

- A: $\min = -\pi/6$, $\max = \pi/6$, B: $\min = N.E.$, $\max = 1$ C: $\min = 0$, $\max = 1$ D: N.A.
E: $\min = 0$, $\max = \pi/4$

6. Il numero di soluzioni complesse di $\frac{z^2+1}{z} = 0$ è

- A: 1 B: N.A. C: 2 D: 3 E: infinito

7. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = (x^2 + e^2)^{1/2} : \quad \text{con } x \in \mathbb{R} \right\},$$

valgono

- A: $\{e, N.E., 1, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{0, 0, 1, N.E.\}$ D: $\{e, e, +\infty, N.E.\}$ E: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$

8. La retta tangente al grafico di $y(x) = 5^{x-1}$ nel punto $x_0 = 1$ è

- A: $5 + \ln(5)x$ B: $1 + \ln(3)(x-1)$ C: $1 + \ln(5)x$ D: N.A. E: $1 + \ln(5)(x-1)$

9. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(e^x)}}{\ln(\ln(x))}$$

vale

- A: N.E. B: 0 C: $+\infty$ D: 1 E: N.A.

10. L'integrale

$$\int_1^e \frac{3x^2}{x^3 + 3} dx$$

vale

- A: 1 B: $\ln(2 + e^3)$ C: N.A. D: $\frac{\ln(3)}{3}$ E: $+\infty$

CODICE=811779

CODICE=811779

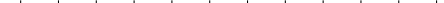
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 giugno 2026

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=036547

9 giugno 2026



(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

CODICE=036547

PARTE A

1. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(e^x)}}{\ln(\ln(x))}$$

vale

A: 1 B: N.A. C: 0 D: $+\infty$ E: N.E.

2. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=17}^{+\infty} \frac{n^n}{n+1} (x - 2^{20})^n$$

vale

A: $R = 0$ B: N.A. C: $R = 4/3$ D: $R = +\infty$ E: $R = 1$

3. Il numero di soluzioni complesse di $\frac{z^2+1}{z} = 0$ è

A: 3 B: N.A. C: 1 D: 2 E: infinito

4. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = (x^2 + e^2)^{1/2} : \text{ con } x \in \mathbb{R} \right\},$$

valgono

A: $\{e, N.E., 1, N.E.\}$ B: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ C: $\{e, e, +\infty, N.E.\}$ D: $\{0, 0, 1, N.E.\}$
E: N.A.

5. L'integrale

$$\int_{-1/n}^{1/n} \sin(n^2 \pi x) dx, \quad \text{con } n \in \mathbb{N},$$

vale

A: $1/n$ B: N.A. C: 0 D: $\frac{2}{n^2 \pi}$ E: $-1/n$

6. L'integrale

$$\int_1^e \frac{3x^2}{x^3 + 3} dx$$

vale

A: $+\infty$ B: 1 C: $\ln(2 + e^3)$ D: N.A. E: $\frac{\ln(3)}{3}$

7. La funzione $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{x}{|x|} |\sin(x)|$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è

A: iniettiva B: positiva C: derivabile in $x = 0$ D: N.A. E: non continua in $x = 0$

8. Il minimo e il massimo della funzione $f(x) = x \arctan(x)$ per $x \in]-1, 1]$ sono

A: $\min = N.E., \max = 1$ B: $\min = 0, \max = \pi/4$ C: $\min = -\pi/6, \max = \pi/6$, D: N.A. E: $\min = 0, \max = 1$

9. Il numero complesso $\left(\frac{1+i}{e^{i\pi}}\right)^2$ vale

A: N.A. B: $2i$ C: 1 D: 0 E: $-2i$

10. La retta tangente al grafico di $y(x) = 5^{x-1}$ nel punto $x_0 = 1$ è

A: $1 + \ln(3)(x-1)$ B: N.A. C: $5 + \ln(5)x$ D: $1 + \ln(5)x$ E: $1 + \ln(5)(x-1)$

CODICE=036547

CODICE=036547

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 giugno 2026

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=499769

9 giugno 2026

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

CODICE=499769

PARTE A

1. Il numero complesso $\left(\frac{1+i}{e^{i\pi}}\right)^2$ vale

A: $2i$ B: $-2i$ C: 0 D: 1 E: N.A.

2. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = (x^2 + e^2)^{1/2} : \text{ con } x \in \mathbb{R} \right\},$$

valgono

A: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ B: $\{0, 0, 1, N.E.\}$ C: N.A. D: $\{e, N.E., 1, N.E.\}$ E: $\{e, e, +\infty, N.E.\}$

3. La funzione $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{x}{|x|} |\sin(x)|$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è

A: non continua in $x = 0$ B: positiva C: N.A. D: iniettiva E: derivabile in $x = 0$

4. L'integrale

$$\int_{-1/n}^{1/n} \sin(n^2 \pi x) dx, \quad \text{con } n \in \mathbb{N},$$

vale

A: $-1/n$ B: $1/n$ C: $\frac{2}{n^2 \pi}$ D: N.A. E: 0

5. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=17}^{+\infty} \frac{n^n}{n+1} (x - 2^{20})^n$$

vale

A: N.A. B: $R = 0$ C: $R = 4/3$ D: $R = 1$ E: $R = +\infty$

6. L'integrale

$$\int_1^e \frac{3x^2}{x^3 + 3} dx$$

vale

A: $\ln(2 + e^3)$ B: $+\infty$ C: 1 D: N.A. E: $\frac{\ln(3)}{3}$

7. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(e^x)}}{\ln(\ln(x))}$$

vale

A: N.A. B: 1 C: $+\infty$ D: 0 E: N.E.

8. Il numero di soluzioni complesse di $\frac{z^2+1}{z} = 0$ è

A: infinito B: 1 C: 2 D: N.A. E: 3

9. La retta tangente al grafico di $y(x) = 5^{x-1}$ nel punto $x_0 = 1$ è

A: N.A. B: $5 + \ln(5)x$ C: $1 + \ln(5)x$ D: $1 + \ln(5)(x-1)$ E: $1 + \ln(3)(x-1)$

10. Il minimo e il massimo della funzione $f(x) = x \arctan(x)$ per $x \in]-1, 1]$ sono

A: $\min = -\pi/6$, $\max = \pi/6$, B: $\min = 0$, $\max = \pi/4$ C: $\min = 0$, $\max = 1$ D: $\min = N.E.$, $\max = 1$ E: N.A.

CODICE=499769

CODICE=499769

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 giugno 2026

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=469724

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 giugno 2026

(Cognome)																			

(Nome)																			

(Numero di matricola)																			

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐	☐
10	☐	☐	☐	☐	☐

CODICE=469724

PARTE A

1. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(e^x)}}{\ln(\ln(x))}$$

vale

A: N.A. B: $+\infty$ C: 0 D: 1 E: N.E.

2. L'integrale

$$\int_1^e \frac{3x^2}{x^3 + 3} dx$$

vale

A: $\frac{\ln(3)}{3}$ B: $+\infty$ C: $\ln(2 + e^3)$ D: 1 E: N.A.

3. L'integrale

$$\int_{-1/n}^{1/n} \sin(n^2 \pi x) dx, \quad \text{con } n \in \mathbb{N},$$

vale

A: N.A. B: $-1/n$ C: 0 D: $\frac{2}{n^2 \pi}$ E: $1/n$

4. La retta tangente al grafico di $y(x) = 5^{x-1}$ nel punto $x_0 = 1$ è

A: $1 + \ln(5)(x - 1)$ B: $1 + \ln(3)(x - 1)$ C: N.A. D: $1 + \ln(5)x$ E: $5 + \ln(5)x$

5. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=17}^{+\infty} \frac{n^n}{n+1} (x - 2^{20})^n$$

vale

A: $R = 4/3$ B: $R = 1$ C: N.A. D: $R = +\infty$ E: $R = 0$

6. La funzione $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{x}{|x|} |\sin(x)|$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è

A: positiva B: N.A. C: non continua in $x = 0$ D: iniettiva E: derivabile in $x = 0$

7. Il numero di soluzioni complesse di $\frac{z^2+1}{z} = 0$ è

A: N.A. B: 2 C: infinito D: 1 E: 3

8. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = (x^2 + e^2)^{1/2} : \quad \text{con } x \in \mathbb{R} \right\},$$

valgono

A: $\{e, e, +\infty, N.E.\}$ B: $\{0, 0, 1, N.E.\}$ C: N.A. D: $\{e, N.E., 1, N.E.\}$ E: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$

9. Il minimo e il massimo della funzione $f(x) = x \arctan(x)$ per $x \in]-1, 1]$ sono

A: $\min = N.E., \max = 1$ B: $\min = 0, \max = 1$ C: $\min = 0, \max = \pi/4$ D: N.A. E:
 $\min = -\pi/6, \max = \pi/6,$

10. Il numero complesso $\left(\frac{1+i}{e^{i\pi}}\right)^2$ vale

A: 0 B: $2i$ C: 1 D: $-2i$ E: N.A.

CODICE=469724

CODICE=469724

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 giugno 2026

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=828400

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 giugno 2026

(Cognome)																			

(Nome)																			

(Numero di matricola)																			

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	☐	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐	☐
10	☐	☐	☐	☐	☐

CODICE=828400

PARTE A

1. Il numero di soluzioni complesse di $\frac{z^2+1}{z} = 0$ è

A: N.A. B: 3 C: infinito D: 2 E: 1

2. L'integrale

$$\int_{-1/n}^{1/n} \sin(n^2 \pi x) dx, \quad \text{con } n \in \mathbb{N},$$

vale

A: $1/n$ B: N.A. C: $-1/n$ D: $\frac{2}{n^2\pi}$ E: 0

3. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(e^x)}}{\ln(\ln(x))}$$

vale

A: 1 B: $+\infty$ C: N.A. D: N.E. E: 0

4. L'integrale

$$\int_1^e \frac{3x^2}{x^3 + 3} dx$$

vale

A: 1 B: $+\infty$ C: N.A. D: $\frac{\ln(3)}{3}$ E: $\ln(2 + e^3)$

5. Il numero complesso $\left(\frac{1+i}{e^{i\pi}}\right)^2$ vale

A: 0 B: $2i$ C: N.A. D: 1 E: $-2i$

6. La retta tangente al grafico di $y(x) = 5^{x-1}$ nel punto $x_0 = 1$ è

A: $1 + \ln(3)(x-1)$ B: N.A. C: $1 + \ln(5)x$ D: $1 + \ln(5)(x-1)$ E: $5 + \ln(5)x$

7. La funzione $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{x}{|x|} |\sin(x)|$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è

A: derivabile in $x = 0$ B: non continua in $x = 0$ C: iniettiva D: N.A. E: positiva

8. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = (x^2 + e^2)^{1/2} : \quad \text{con } x \in \mathbb{R} \right\},$$

valgono

A: N.A. B: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ C: $\{e, N.E., 1, N.E.\}$ D: $\{0, 0, 1, N.E.\}$ E: $\{e, e, +\infty, N.E.\}$

9. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=17}^{+\infty} \frac{n^n}{n+1} (x - 2^{20})^n$$

vale

A: $R = +\infty$ B: $R = 1$ C: N.A. D: $R = 4/3$ E: $R = 0$

10. Il minimo e il massimo della funzione $f(x) = x \arctan(x)$ per $x \in]-1, 1]$ sono

A: min = 0, max = $\pi/4$ B: min = 0, max = 1 C: min = N.E., max = 1 D: min = $-\pi/6$, max = $\pi/6$, E: N.A.

CODICE=828400

CODICE=828400

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 giugno 2026

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Cognome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Nome)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	☐	☒	☐	☐	☐
2	☒	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐	☒
4	☒	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☒
6	☐	☐	☒	☐	☐
7	☐	☐	☐	☒	☐
8	☐	☐	☐	☐	☒
9	☐	☐	☒	☐	☐
10	☐	☐	☒	☐	☐

CODICE=811779

CODICE=811779

9 giugno 2026

(Nome)

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	☐	☐	☐	☒	☐
2	☒	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☒	☐
4	☐	☐	☒	☐	☐
5	☐	☐	☒	☐	☐
6	☐	☐	☐	☒	☐
7	☐	☐	☒	☐	☐
8	☐	☒	☐	☐	☐
9	☐	☒	☐	☐	☐
10	☐	☐	☐	☐	☒

CODICE=036547

CODICE=036547

9 giugno 2026

(Nome)

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

CODICE=499769

CODICE=499769

9 giugno 2026

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1	☐	☒	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐	☒
3	☐	☐	☒	☐	☐
4	☒	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐	☒
6	☐	☐	☐	☐	☒
7	☐	☒	☐	☐	☐
8	☒	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☒	☐	☐
10	☐	☒	☐	☐	☐

CODICE=469724

CODICE=469724

9 giugno 2026

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

CODICE=828400

CODICE=828400

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 giugno 2026

1 Sia

$$f(x) = \frac{x^3}{x-1} \quad x \neq 1.$$

Determinare se esistono valori $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $f(x) = \lambda$ abbia 3 soluzioni distinte. Calcolare eventuali punti di flesso a tangente non orizzontale.

Soluzione. Per determinare il numero di soluzioni descriviamo il grafico della funzione. La f è regolare nel suo dominio e si ha intanto studiando i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

Calcolando la derivata prima

$$f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2} \quad x \neq 1$$

e quindi il segno della derivata dipende solo dal numeratore, e si ha

$$f' > 0 \text{ per } x > 3/2$$

$$f' = 0 \text{ per } x = 0$$

$$f' < 0 \text{ per } x < 3/2, x \neq 1$$

Quindi si ha un solo punto stazionario, che è di minimo locale per $x = 3/2$ e il grafico risulta qualitativamente il seguente. Si hanno pertanto 3 intersezioni fra il grafico e la retta $y = \lambda$ se $\lambda > f(3/2) = 27/4$, dato che per $\lambda = 27/4$ le intersezioni sono 2, mentre per $\lambda < 27/4$ ne abbiamo una sola.

Calcolando la derivata seconda si ha

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^3} \quad x \neq 1$$

che si annulla solo per $x = 0$, dato che $3 - 3x + x^2$ non ha soluzioni reali.

Pertanto abbiamo che $f''(0) = 0$ e in tale punto si ha un cambio di segno della derivata seconda: $x_0 = 0$ è l'unico punto di flesso dato che f è derivabile almeno 2 volte in tutto il dominio. Dato che $f'(0) = 0$, non ci sono flessi a tangente non orizzontale.

CODICE=828400

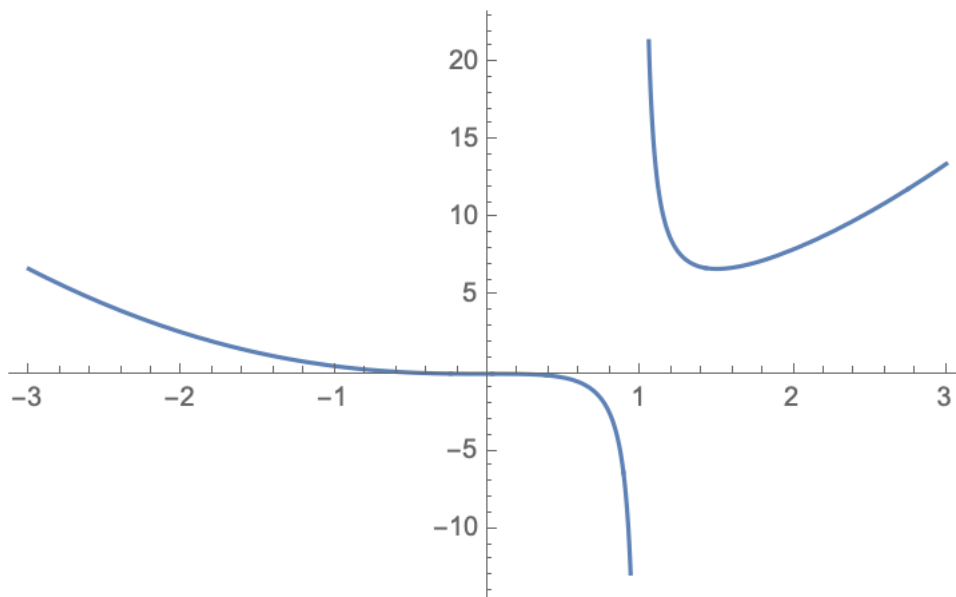


Figura 1: Grafico di $f(x) = x^3/(x - 1)$

2 Studiare 1) la convergenza semplice; 2) la convergenza assoluta) di

$$\sum_{n=30}^{\infty} (-1)^n \ln(1 + e^{-n}).$$

Soluzione 1) La serie in questione è a segni alterni, vediamo se il criterio di Leibniz è soddisfatto. Scriviamola come $\sum_{n=30}^{\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n \ln(1 + e^{-n})$ e intanto *i)* $a_n \geq 0$, dato che $1 + e^{-n} > 1$. Poi *ii)* $a_n \rightarrow 0$ se $n \rightarrow +\infty$ per i limiti notevoli. Per vedere se $a_{n+1} \leq a_n$ basta osservare che la funzione

$$\phi(x) = \ln(1 + x)$$

è crescente e che $e^{-(n+1)} = \frac{1}{e^{(n+1)}} < \frac{1}{e^n} = e^{-n}$.

2) Per studiare la assoluta convergenza studiamo il comportamento di

$$\sum_{n=30}^{\infty} |(-1)^n \ln(1 + e^{-n})| = \sum_{n=30}^{\infty} \ln(1 + e^{-n}),$$

e osserviamo che $\phi(x) = \ln(1 + x) = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$ e quindi

$$\ln(1 + e^{-n}) = e^{-n} + o(e^{-n})$$

e dunque la serie coi valori assoluti si comporta asintoticamente come la serie a termini positivi $\sum e^{-n} = \sum (1/e)^n$, che converge essendo una serie geometrica di ragione minore di 1.

3 Risolvere, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = x^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Si tratta di un'equazione lineare. L'omogenea associata $Y' + Y = 0$ ha come soluzione $Y(x) = ce^{-x}$. Non c'è risonanza e cerchiamo soluzione particolare della forma

$$y_f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

CODICE=828400

e sostituendo troviamo

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^3 + a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = x^3.$$

Risolvendo il sistema si ha $y_f(x) = -6 + 6x - 3x^2 + x^3$ e quindi l'integrale generale risulta

$$y(x) = ce^{-x} - 6 + 6x - 3x^2 + x^3 \quad c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$ si ha la soluzione

$$y(x) = 6e^{-x} - 6 + 6x - 3x^2 + x^3.$$

- 4 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile che sia ovunque positiva (o ovunque negativa). Allora, esiste un punto $\xi \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx. \quad (1)$$

Soluzione Supponiamo che $g(x) \geq 0$ per ogni x (in caso contrario si sostituisca g con $-g$). In questa situazione, si ha che

$$m \cdot g(x) \leq f(x)g(x) \leq M \cdot g(x) \quad \text{per } x \in [a, b],$$

dove m e M sono rispettivamente il minimo e il massimo di $f(x)$. La

Si ha dunque

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Se $\int_a^b g(x) dx > 0$, possiamo dividere per tale quantità, ottenendo

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M,$$

e per il teorema del valor medio applicato alla funzione continua f si ha che esiste $\xi \in [a, b]$ tale che

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = f(\xi),$$

concludendo la dimostrazione in questo caso.

Se $\int_a^b g(x) dx = 0$, invece

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|g(x) dx \leq \max_{[a,b]} |f| \int_a^b g(x) dx = 0,$$

e quindi $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$ e l'identità è vera per ogni scelta di $\xi \in [a, b]$.