Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 luglio 2025

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, manuali, appunti.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=351483

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 luglio 2025

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=351483

PARTE A

1. Data $f(x) = \sin(\pi x/2)$. Allora $f'(1/3)$ è uguale a

   A: $\frac{\pi}{2}$ B: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C: $\frac{\pi}{3}$ D: $\frac{\pi}{6}$ E: N.A.

2. Una primitiva della funzione $x(t) = \frac{\log(t)}{t}$ è

   A: $\frac{1}{3}t^2\log(t) - \frac{t^2}{4}$ B: $\sin(t) + t\cos(t)$ C: $\frac{t^2\log(t)}{2}$ D: N.A. E: $\frac{t^2}{2}$

3. Il limite

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{46}\ \ln^{28}(x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}$$

   vale

   A: N.A. B: $-\infty$ C: -1 D: 1 E: N.E.

4. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A = \{y \in \mathbb{R} : y = \ln|x|,\ x \in [-3,3]\setminus]-2,2[\}$$

   valgono

   A: N.A. B: $\{\ln 2, N.E., \ln 3, \ln 3\}$ C: $\{\ln 2, \ln 2, \ln 3, \ln 3\}$ D: $\{\ln(-3), N.E., \ln(3), \ln(3)\}$
   E: $\{-3, -3, 2, N.E.\}$

5. La funzione $f:\ \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln(|x+1|)$ è

   A: monotona crescente B: iniettiva C: sempre non negativa D: N.A. E: surgettiva

6. La serie a termini non-negativi

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin(n)}{(n^2+3n+5)(n+4)^\alpha}$$

   converge se e solo se

   A: $\alpha > -1$ B: $3 < \alpha < \pi$ C: N.A. D: $\alpha > -2$ E: $\alpha > 0$

7. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = 2^{(-x^2)}$ vale

   A: $1 + \ln(2), x + \frac{\ln(2)^2}{2}x^2$ B: N.A. C: $1 - \ln(4)x^2$ D: $1 + 2\ln(2)x^2$ E: 1

8. La funzione $f(x) = \begin{cases} \cos(|x|) & \text{per } x < 0 \\ 1 - x^8 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: non è né continua né derivabile. B: è continua e derivabile. C: è derivabile, ma non continua. D: N.A. E: è continua, ma non derivabile.

9. Parte reale e coefficiente della parte immaginaria del numero complesso $z = \cos(25\pi) + i\sin(27\pi/2)$ sono

   A: $(1,1)$ B: $(0,1)$ C: $(1,-1)$ D: N.A. E: $(-1,1)$

10. L'integrale

    $$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(|x|)|\, dx$$

    vale

    A: 20 B: 0 C: N.A. D: 4 E: $\frac{41}{8}$

CODICE=351483

CODICE=351483

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 luglio 2025

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, manuali, appunti.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=470595

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 luglio 2025

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=470595

PARTE A

1. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = 2^{(-x^2)}$ vale

   A: 1   B: $1 - \ln(4)x^2$ C: $1 + \ln(2), x + \frac{\ln(2)^2}{2}x^2$ D: $1 + 2\ln(2)x^2$ E: N.A.

2. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A = \{y \in \mathbb{R} : y = \ln|x|,\ x \in [-3,3] \setminus]-2,2[\}$$

   valgono

   A: $\{\ln 2, N.E., \ln 3, \ln 3\}$ B: N.A.   C: $\{\ln(-3), N.E., \ln(3), \ln(3)\}$ D: $\{-3, -3, 2, N.E.\}$
   E: $\{\ln 2, \ln 2, \ln 3, \ln 3\}$

3. Una primitiva della funzione $x(t) = \frac{\log(t)}{t}$ è

   A: $\frac{t^2}{2}$ B: $\frac{1}{3}t^2\log(t) - \frac{t^2}{4}$ C: N.A.   D: $\sin(t) + t\cos(t)$ E: $\frac{t^2\log(t)}{2}$

4. La funzione $f:\ \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln(|x+1|)$ è

   A: sempre non negativa   B: iniettiva   C: N.A.   D: surgettiva   E: monotona crescente

5. La serie a termini non-negativi

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin(n)}{(n^2 + 3n + 5)(n+4)^{\alpha}}$$

   converge se e solo se

   A: $\alpha > -1$ B: $3 < \alpha < \pi$ C: $\alpha > 0$ D: N.A.   E: $\alpha > -2$

6. L'integrale

   $$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(|x|)|\, dx$$

   vale

   A: 0   B: 4   C: 20   D: $\frac{41}{8}$ E: N.A.

7. La funzione $f(x) = \begin{cases} \cos(|x|) & \text{per } x < 0 \\ 1 - x^8 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: è continua, ma non derivabile.   B: è derivabile, ma non continua.   C: non è né continua né derivabile.   D: è continua e derivabile.   E: N.A.

8. Il limite

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{46}\ \ln^{28}(x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}$$

   vale

   A: N.A.   B: 1   C: $-\infty$ D: N.E.   E: -1

9. Parte reale e coefficiente della parte immaginaria del numero complesso $z = \cos(25\pi) + i\sin(27\pi/2)$ sono

   A: $(-1, 1)$ B: N.A.   C: $(1, -1)$ D: $(1, 1)$ E: $(0, 1)$

10. Data $f(x) = \sin(\pi x/2)$. Allora $f'(1/3)$ è uguale a

    A: $\frac{\pi}{2}$ B: $\frac{\pi}{3}$ C: $\frac{\pi}{6}$ D: N.A.   E: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

CODICE=470595

CODICE=470595

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 luglio 2025

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, manuali, appunti.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=075251

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 luglio 2025

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=075251

PARTE A

1. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = 2^{(-x^2)}$ vale

   A: $1 - \ln(4)x^2$ B: N.A. C: $1 + 2\ln(2)x^2$ D: 1 E: $1 + \ln(2), x + \frac{\ln(2)^2}{2}x^2$

2. L'integrale
$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(|x|)|\, dx$$
   vale

   A: N.A. B: 0 C: $\frac{41}{8}$ D: 20 E: 4

3. Data $f(x) = \sin(\pi x/2)$. Allora $f'(1/3)$ è uguale a

   A: $\frac{\pi}{2}$ B: $\frac{\pi}{6}$ C: N.A. D: $\frac{\pi}{3}$ E: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. La funzione $f: \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln(|x+1|)$ è

   A: iniettiva B: surgettiva C: N.A. D: sempre non negativa E: monotona crescente

5. Parte reale e coefficiente della parte immaginaria del numero complesso $z = \cos(25\pi) + i\sin(27\pi/2)$ sono

   A: $(0,1)$ B: N.A. C: $(1,1)$ D: $(1,-1)$ E: $(-1,1)$

6. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{y \in \mathbb{R} : y = \ln|x|,\ x \in [-3,3]\backslash] - 2, 2[\}$$
   valgono

   A: $\{\ln 2, \ln 2, \ln 3, \ln 3\}$ B: N.A. C: $\{-3, -3, 2, N.E.\}$ D: $\{\ln 2, N.E., \ln 3, \ln 3\}$ E: $\{\ln(-3), N.E., \ln(3), \ln(3)\}$

7. La funzione $f(x) = \begin{cases} \cos(|x|) & \text{per } x < 0 \\ 1 - x^8 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: N.A. B: è continua, ma non derivabile. C: è continua e derivabile. D: è derivabile, ma non continua. E: non è né continua né derivabile.

8. Il limite
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{46}\ \ln^{28}(x) e^x}{e^{2x}}$$
   vale

   A: $-\infty$ B: -1 C: 1 D: N.A. E: N.E.

9. Una primitiva della funzione $x(t) = \frac{\log(t)}{t}$ è

   A: $\frac{t^2 \log(t)}{2}$ B: $\frac{t^2}{2}$ C: N.A. D: $\frac{1}{3}t^2\log(t) - \frac{t^2}{4}$ E: $\sin(t) + t\cos(t)$

10. La serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin(n)}{(n^2 + 3n + 5)(n+4)^{\alpha}}$$
    converge se e solo se

    A: $\alpha > -2$ B: $\alpha > 0$ C: N.A. D: $\alpha > -1$ E: $3 < \alpha < \pi$

CODICE=075251

CODICE=075251

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 luglio 2025

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, manuali, appunti.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=565527

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 luglio 2025

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=565527

PARTE A

1. L'integrale
$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(|x|)|\, dx$$
vale
A: $\frac{41}{8}$ B: 4 C: N.A. D: 0 E: 20

2. Parte reale e coefficiente della parte immaginaria del numero complesso $z = \cos(25\pi) + i\sin(27\pi/2)$ sono
A: $(-1, 1)$ B: N.A. C: $(0, 1)$ D: $(1, -1)$ E: $(1, 1)$

3. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{46}\ \ln^{28}(x)\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}}$$
vale
A: 1 B: $-\infty$ C: -1 D: N.A. E: N.E.

4. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{y \in \mathbb{R} : y = \ln|x|,\ x \in [-3, 3]\setminus] - 2, 2[\}$$
valgono
A: $\{\ln 2, N.E., \ln 3, \ln 3\}$ B: N.A. C: $\{\ln 2, \ln 2, \ln 3, \ln 3\}$ D: $\{-3, -3, 2, N.E.\}$ E: $\{\ln(-3), N.E., \ln(3), \ln(3)\}$

5. Una primitiva della funzione $x(t) = \frac{\log(t)}{t}$ è
A: N.A. B: $\sin(t) + t\cos(t)$ C: $\frac{1}{3}t^2\log(t) - \frac{t^2}{4}$ D: $\frac{t^2}{2}$ E: $\frac{t^2\log(t)}{2}$

6. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = 2^{(-x^2)}$ vale
A: 1 B: $1 - \ln(4)x^2$ C: N.A. D: $1 + 2\ln(2)x^2$ E: $1 + \ln(2), x + \frac{\ln(2)^2}{2}x^2$

7. La funzione $f:\ \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln(|x + 1|)$ è
A: sempre non negativa B: surgettiva C: iniettiva D: monotona crescente E: N.A.

8. Data $f(x) = \sin(\pi x/2)$. Allora $f'(1/3)$ è uguale a
A: $\frac{\pi}{6}$ B: $\frac{\pi}{2}$ C: N.A. D: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E: $\frac{\pi}{3}$

9. La funzione $f(x) = \begin{cases} \cos(|x|) & \text{per } x < 0 \\ 1 - x^8 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$
A: è continua, ma non derivabile. B: N.A. C: è continua e derivabile. D: non è né continua né derivabile. E: è derivabile, ma non continua.

10. La serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin(n)}{(n^2 + 3n + 5)(n + 4)^{\alpha}}$$
converge se e solo se
A: $3 < \alpha < \pi$ B: $\alpha > 0$ C: $\alpha > -1$ D: N.A. E: $\alpha > -2$

CODICE=565527

CODICE=565527

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 luglio 2025

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	○	●	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	●	○	○
5	○	○	○	○	●
6	●	○	○	○	○
7	○	●	○	○	○
8	○	●	○	○	○
9	○	○	○	●	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=351483

CODICE=351483

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova di Analisi Matematica 1

14 luglio 2025

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	○	○	●
3	○	○	●	○	○
4	○	○	○	●	○
5	●	○	○	○	○
6	○	●	○	○	○
7	○	○	○	●	○
8	●	○	○	○	○
9	○	●	○	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=470595

CODICE=470595

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 luglio 2025

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	●	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	●	○	○	○
6	●	○	○	○	○
7	○	○	●	○	○
8	○	○	○	●	○
9	○	○	●	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=075251

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 luglio 2025

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	●	○	○
5	●	○	○	○	○
6	○	○	●	○	○
7	○	●	○	○	○
8	○	○	●	○	○
9	○	○	●	○	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=565527

CODICE=565527

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 luglio 2025

1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{(x+1)}{xe^x} \quad x \neq 0$$

e in particolare determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soluzione. La funzione risulta continua e con derivate prime esuccessive continue per ogni $x \neq 0$.

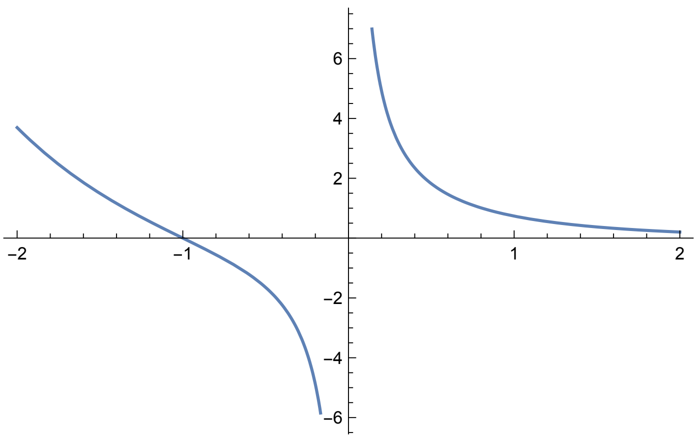
Calcolando i limiti agli estremi del dominio abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x+\infty} f(x) = 0.$$

Passando alla derivata prima si ha

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}\left(x^2+x+1\right)}{x^2}$$

e dato che $x^2 + x + 1$ ha discriminante negativo, risulta che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in Dom(f)$. La funzione risulta quindi decrescente per $x < 0$ e per $x > 0$. Pertanto abbiamo che il grafico approssimativo è il seguente e quindi l'equazione $f(x) = \lambda$ ha due soluzioni se $\lambda > 0$ e una



sola se $\lambda \leq 0$.

2 Risolvere, per $\alpha > 0$, l'equazione differenziale

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$$

Soluzione. Si tratta di equazione lineare non omogenea. L'omogenea associata $Y''(x) - 5Y'(x) + 6Y(x) = 0$ ha come soluzioni $c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{3x}$. Per $\alpha \not= 2,3$ non si ha risonanza e la soluzione particolare va cercata della forma $y_f(x) = c\mathrm{e}^{\alpha x}$. Sostituendo otteniamo $c = (\alpha^2 - 5\alpha + 6)^{-1}$.

Per $\alpha = 2,3$ is ha risonanza e la soluzione va cercata della forma $y_f(x) = c\mathrm{e}^{2x}$ e $y_f(x) = c\mathrm{e}^{3x}$. Sostituendo si ottengono per $\alpha = 2$ il valore di c risulta uguale a -1, mentre per $\alpha = 3$ si ha $c = 1$. Si ha quindi

$$y(x) = \begin{cases} c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{3x} + (\alpha^2 - 5\alpha + 6)^{-1}\mathrm{e}^{\alpha x} & \alpha \neq 2,3 \\ c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{3x} - x\mathrm{e}^{2x} & \alpha = 2 \\ c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{3x} + x\mathrm{e}^{3x} & \alpha = 3. \end{cases}$$

3 Studiare la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$

Soluzione. Per trovare il raggio di convergenza calcoliamo il limite $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)^{1/n}$ usando la formula di Stirling risulta uguale a

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}n^n/\mathrm{e}^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}}{\sqrt[2n]{2\pi n}}\right) = \mathrm{e}.$$

Pertanto il raggio di convergenza vale $1/\mathrm{e}$ e la serie converge per $|x| < 1/\mathrm{e}$ e non converge per $|x| > 1/\mathrm{e}$. Studiamo a parte gli estremi. Per $x = 1/e$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{\mathrm{e}^n n!}$ che non converge dato che il termine generico si comporta come $\mathcal{O}(1/\sqrt{n})$. Per $x = -1/\mathrm{e}$ la serie converge per il criterio di Leibniz. Infatti la successione $n^n(n!\ \mathrm{e}^n)$ è positiva e infinitesima. La decrescenza si ottiene osservando che

$$\frac{n^{n+1}}{(n+1)!\ \mathrm{e}^{n+1}} \leq \frac{n^n}{n!\ \mathrm{e}^n} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}$$

e la successione $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge crescendo ad e e quindi è sempre minore od uguale a e.

4 Calcolare parte reale e immaginaria di $\cos(i)$ e di $\sin(i)$

Soluzione. Usando le formule $\mathrm{e}^{\pm ix} = \cos(x) \pm i\sin(x)$ si ha

$$\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2} = \cos(x) \qquad \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i} = \sin(x),$$

da cui

$$\cos(i) = \frac{\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{1}}{2} = \cosh(1) + i0 \qquad \text{e} \qquad \sin(i) = \frac{\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{1}}{2i} = 0 + i\sinh(1).$$

Una derivazione più rigorosa si ottiene considerando gli sviluppi in serie (assolutamente convergenti) di seno e coseno

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \qquad \cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

e sostituendo al posto di z il numero i

$$\sin(i) = i - i\frac{1}{3!} + i\frac{1}{5!} + \dots \qquad \cos(i) = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

si riconoscono gli sviluppi in serie di $i \times \sinh(1)$ e di $\cosh(1)$.