Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

24 giugno 2025

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, manuali, appunti.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=431440

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

24 giugno 2025

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=431440

PARTE A

1. La funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(|x|)$ è

   A: N.A. B: sempre non negativa C: monotona crescente D: surgettiva E: iniettiva

2. La serie a termini non-negativi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+3n+5)(n+4)^{\alpha}}$$

   converge se e solo se

   A: $\alpha > 0$ B: $\alpha > -1$ C: N.A. D: $\alpha > -2$ E: $3 < \alpha < \pi$

3. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x) > \mathrm{e}\}$$

   valgono

   A: $\{\mathrm{e}, N.E., +\infty, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{\mathrm{e}, N.E., 1, 1\}$ D: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ E: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$

4. Modulo e argomento del numero complesso $z = \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono

   A: $(1, 4\pi/3)$ B: $(1, -5\pi/6)$ C: N.A. D: $(2, 5\pi/3)$ E: $(1, \pi/6)$

5. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{per } x < 0 \\ \tan(x^2) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: è continua e derivabile. B: è derivabile, ma non continua. C: non è né continua né derivabile. D: N.A. E: è continua, ma non derivabile.

6. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \mathrm{e}^{(-x^2)}$ vale

   A: $1 + \mathrm{e}\,x + \frac{\mathrm{e}^2}{2}x^2$ B: $1 - x^2$ C: $1 + x + x^2$ D: N.A. E: 1

7. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{2(x^2-4)}}{\mathrm{e}^{4x}}$$

   vale

   A: 0 B: $-\infty$ C: N.A. D: 1 E: N.E.

8. L'integrale

$$\int_{-1}^{1} |x^5|\, dx$$

   vale

   A: $\frac{41}{2}$ B: 0 C: $\frac{\sqrt{\pi}-1}{2}$ D: 20 E: N.A.

9. Data $f(x) = \sin(\pi x)$. Allora $f'(1/3)$ è uguale a

   A: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B: $\frac{\pi}{3}$ C: $\frac{\pi}{6}$ D: N.A. E: $\frac{\pi}{2}$

10. Una primitiva della funzione $x(t) = t\log(t)$ è

   A: N.A. B: $\frac{t^2\log(t)}{2} - \frac{t^2}{4}$ C: $\sin(t) + t\cos(t)$ D: $\frac{1}{3}t^2\log(t) - \frac{t^2}{4}$ E: $-\frac{t^2}{2}\cos(t)$

CODICE=431440

CODICE=431440

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

24 giugno 2025

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, manuali, appunti.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=235090

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

24 giugno 2025

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=235090

PARTE A

1. Modulo e argomento del numero complesso $z = \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono

   A: $(1, 4\pi/3)$ B: N.A. C: $(1, -5\pi/6)$ D: $(1, \pi/6)$ E: $(2, 5\pi/3)$

2. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(|x|)$ è

   A: iniettiva B: N.A. C: sempre non negativa D: monotona crescente E: surgettiva

3. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \mathrm{e}^{(-x^2)}$ vale

   A: $1 - x^2$ B: $1 + x + x^2$ C: 1 D: $1 + \mathrm{e}\,x + \frac{\mathrm{e}^2}{2}x^2$ E: N.A.

4. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{per } x < 0 \\ \tan(x^2) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: N.A. B: non è né continua né derivabile. C: è derivabile, ma non continua. D: è continua e derivabile. E: è continua, ma non derivabile.

5. La serie a termini non-negativi

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 + 3n + 5)(n + 4)^{\alpha}}$$

   converge se e solo se

   A: $3 < \alpha < \pi$ B: $\alpha > 0$ C: N.A. D: $\alpha > -1$ E: $\alpha > -2$

6. Una primitiva della funzione $x(t) = t\log(t)$ è

   A: $\frac{t^2\log(t)}{2} - \frac{t^2}{4}$ B: $\sin(t) + t\cos(t)$ C: $\frac{1}{3}t^2\log(t) - \frac{t^2}{4}$ D: $-\frac{t^2}{2}\cos(t)$ E: N.A.

7. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x) > \mathrm{e}\}$$

   valgono

   A: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$ B: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ C: $\{\mathrm{e}, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: N.A. E: $\{\mathrm{e}, N.E., 1, 1\}$

8. Il limite

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{2(x^2-4)}}{\mathrm{e}^{4x}}$$

   vale

   A: 0 B: 1 C: $-\infty$ D: N.E. E: N.A.

9. Data $f(x) = \sin(\pi x)$. Allora $f'(1/3)$ è uguale a

   A: $\frac{\pi}{2}$ B: $\frac{\pi}{6}$ C: $\frac{\pi}{3}$ D: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E: N.A.

10. L'integrale

    $$\int_{-1}^{1} |x^5|\,dx$$

    vale

    A: $\frac{41}{2}$ B: 0 C: 20 D: $\frac{\sqrt{\pi}-1}{2}$ E: N.A.

CODICE=235090

CODICE=235090

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

24 giugno 2025

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, manuali, appunti.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=533412

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

24 giugno 2025

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=533412

PARTE A

1. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{per } x < 0 \\ \tan(x^2) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: è continua, ma non derivabile. B: non è né continua né derivabile. C: N.A. D: è derivabile, ma non continua. E: è continua e derivabile.

2. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x) > \mathrm{e}\}$$

   valgono

   A: $\{\mathrm{e}, N.E., 1, 1\}$ B: N.A. C: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ D: $\{\mathrm{e}, N.E., +\infty, N.E.\}$ E: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$

3. Una primitiva della funzione $x(t) = t\log(t)$ è

   A: $\sin(t) + t\cos(t)$ B: $\frac{t^2\log(t)}{2} - \frac{t^2}{4}$ C: N.A. D: $-\frac{t^2}{2}\cos(t)$ E: $\frac{1}{3}t^2\log(t) - \frac{t^2}{4}$

4. La serie a termini non-negativi

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+3n+5)(n+4)^{\alpha}}$$

   converge se e solo se

   A: N.A. B: $\alpha > -2$ C: $3 < \alpha < \pi$ D: $\alpha > -1$ E: $\alpha > 0$

5. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \mathrm{e}^{(-x^2)}$ vale

   A: N.A. B: $1 + x + x^2$ C: 1 D: $1 + \mathrm{e}\,x + \frac{\mathrm{e}^2}{2}x^2$ E: $1 - x^2$

6. Data $f(x) = \sin(\pi x)$. Allora $f'(1/3)$ è uguale a

   A: $\frac{\pi}{3}$ B: $\frac{\pi}{6}$ C: N.A. D: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E: $\frac{\pi}{2}$

7. L'integrale

   $$\int_{-1}^{1} |x^5|\,dx$$

   vale

   A: 0 B: N.A. C: $\frac{41}{2}$ D: $\frac{\sqrt{\pi}-1}{2}$ E: 20

8. Il limite

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{2(x^2-4)}}{\mathrm{e}^{4x}}$$

   vale

   A: 0 B: N.E. C: 1 D: N.A. E: $-\infty$

9. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(|x|)$ è

   A: sempre non negativa B: iniettiva C: N.A. D: monotona crescente E: surgettiva

10. Modulo e argomento del numero complesso $z = \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono

    A: $(1, \pi/6)$ B: $(1, 4\pi/3)$ C: $(1, -5\pi/6)$ D: N.A. E: $(2, 5\pi/3)$

CODICE=533412

CODICE=533412

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

24 giugno 2025

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, manuali, appunti.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=875803

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

24 giugno 2025

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=875803

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x) > \mathrm{e}\}$$
valgono
A: $\{\mathrm{e}, N.E., 1, 1\}$ B: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ C: $\{\mathrm{e}, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: N.A. E: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$

2. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{per } x < 0 \\ \tan(x^2) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$
A: è continua e derivabile. B: N.A. C: è continua, ma non derivabile. D: non è né continua né derivabile. E: è derivabile, ma non continua.

3. Modulo e argomento del numero complesso $z = \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono
A: N.A. B: $(1, \pi/6)$ C: $(1, 4\pi/3)$ D: $(1, -5\pi/6)$ E: $(2, 5\pi/3)$

4. Una primitiva della funzione $x(t) = t\log(t)$ è
A: $\frac{1}{3}t^2\log(t) - \frac{t^2}{4}$ B: $\frac{t^2\log(t)}{2} - \frac{t^2}{4}$ C: $\sin(t) + t\cos(t)$ D: N.A. E: $-\frac{t^2}{2}\cos(t)$

5. Data $f(x) = \sin(\pi x)$. Allora $f'(1/3)$ è uguale a
A: $\frac{\pi}{3}$ B: $\frac{\pi}{2}$ C: N.A. D: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E: $\frac{\pi}{6}$

6. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \mathrm{e}^{(-x^2)}$ vale
A: N.A. B: $1 + \mathrm{e}\,x + \frac{\mathrm{e}^2}{2}x^2$ C: 1 D: $1 - x^2$ E: $1 + x + x^2$

7. La serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 + 3n + 5)(n + 4)^{\alpha}}$$
converge se e solo se
A: $\alpha > -1$ B: $3 < \alpha < \pi$ C: N.A. D: $\alpha > -2$ E: $\alpha > 0$

8. L'integrale
$$\int_{-1}^{1} |x^5|\,dx$$
vale
A: $\frac{41}{2}$ B: 0 C: N.A. D: $\frac{\sqrt{\pi}-1}{2}$ E: 20

9. Il limite
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{2(x^2-4)}}{\mathrm{e}^{4x}}$$
vale
A: 0 B: N.E. C: N.A. D: 1 E: $-\infty$

10. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(|x|)$ è
A: N.A. B: surgettiva C: iniettiva D: monotona crescente E: sempre non negativa

CODICE=875803

CODICE=875803

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

24 giugno 2025

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	○	●	○
3	○	●	○	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	○	●	○	○	○
7	○	○	●	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	○	●
10	○	●	○	○	○

CODICE=431440

CODICE=431440

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

24 giugno 2025

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	●	○	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	●	○	○	○	○
7	○	○	○	●	○
8	○	○	○	○	●
9	●	○	○	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=235090

CODICE=235090

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

24 giugno 2025

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	●	○	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	○	●	○	○	○
8	○	○	○	●	○
9	○	○	●	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=533412

CODICE=533412

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

24 giugno 2025

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	●	○	○
3	○	●	○	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	●	○	○	○
6	○	○	○	●	○
7	○	○	○	●	○
8	○	○	●	○	○
9	○	○	●	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=875803

CODICE=875803

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

24 giugno 2025

PARTE B

1 Si consideri per $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = (x^2 - 2x + \lambda)\mathrm{e}^{-x},$$

e si determinino, se esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali f è monotona, e $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui è convessa.

Soluzione. La funzione f risulta di classe C^∞ per tutte le $x \in \mathbb{R}$ e quindi monotonia e convessità sono legate al segno su $\mathbb{R}$ della derivata prima e seconda, rispettivamente.

Si ha

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\left(\lambda + x^2 - 4x + 2\right)$$

e, dato che l'esponenziale è sempre positivo, il segno di f' dipende solo da quello di $g_1(x) = (\lambda + x^2 - 4x + 2)$. Dato che g_1 è polinomio di secondo grado, il suo segno è costante (e positivo o nullo) se il discriminante è minore o uguale a zero.

$$\Delta_{g_1} = 4^2 - 4(2 + \lambda) \leq 0,$$

quindi per $\lambda \geq 2$.

Per lo studio della convessità

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\lambda + x^2 - 6x + 6\right)$$

e il segno di f'' dipende di nuovo solo da quello di $g_2(x) = (\lambda + x^2 - 6x + 6)$. Il discriminante di g_2 quindi soddisfa

$$\Delta_{g_2} = 6^2 - 4(6 + \lambda) \leq 0,$$

se e solo se $\lambda \geq 3$.

2 Studiare, per $\alpha > 0$ la convergenza dell'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin(x + x^\alpha)}{x^2 \arctan(x^\alpha + x^{1/\alpha})}\, dx$$

Soluzione. Dato che $x \geq 2 > 0$ il denominatore non si annulla mai e la funzione integranda risulta continua e quindi integrabile su ogni intervallo della forma $[2, b]$ con $2 \leq b < +\infty$.

Possiamo provare a studiare l'assoluta convergenza osservando che

$$\left|\frac{\sin(x + x^\alpha)}{x^2 \arctan(x^\alpha + x^{1/\alpha})}\right| \leq \frac{1}{x^2 \arctan(x^\alpha + x^{1/\alpha})}$$

e dato che $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x^\alpha + x^{1/\alpha}) = \frac{\pi}{2}$, per ogni $\alpha > 0$ dal confronto deduciamo che è integrabile perchè il valore assoluto della funzione integranda è maggiorato da $2/(\pi x^2)$.

3 Studiare la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)} x^n.$$

Soluzione. Calcoliamo intanto il raggio di convegenza osservando che $\log(2) \le \log(n) \le n$ per ogni $n \ge 2$ e quindi dal teorema dei carabinieri

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\log(n)} = 1.$$

Il raggio di convergenza $R = 1$ e la serie converge assolutamente per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$. I casi $x = \pm 1$ vanno studiati a parte. Per $x = 1$ la serie di potenze diventa $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)}$ che diverge dato che $\frac{1}{\log(n)} > \frac{1}{n}$. Per $x = -1$ la serie di potenze diventa $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n)}$ che converge per il criterio di Leibniz (la verifica è immediata).

4 Sia $u(t) = x(t) + iy(t)$ tale che

$$u''(t) + iu(t) = 0.$$

Determinare u.

Soluzione. Si tratta di una equazione differenziale lineare complessa del secondo ordine. Possiamo separare la parte reale e immaginaria ottenendo due equazioni reali, o risolvere quella complessa direttamente. Separando parte reale e immaginaria otteniamo le due equazioni

$$x''(t) - y(t) = 0 \quad \text{e} \quad y''(t) + x(t) = 0.$$

Derivando due volte e sostituendo si ha

$$x^{(iv)}(t) + x(t) = 0 \quad \text{e} \quad y^{(iv)}(t) + y(t) = 0.$$

Entrambe le equazioni (quella per la parte reale e quella per la parte immaginaria) hanno come equazione caratteristica $\lambda^4 + 1 = 0$, che ha come soluzioni i 4 numeri complessi

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pertanto sia $x(t)$ che $y(t) <$ sono combinazioni lineari (a coefficienti reali) delle 4 funzioni

$$\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}t),\ \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}t),\ \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}t),\ \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}t).$$

Quindi

$$\begin{aligned} u(t) =& (a_1 + ib_1)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}t) + (a_2 + ib_2)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}t) \\ &+ (a_3 + ib_3)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}t) + (a_4 + ib_4)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}t). \end{aligned}$$