

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica  
Prova di Analisi Matematica 1

9 Settembre 2024

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

**CODICE=214292**



## PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) \cos(x) < 0\}$$

valgono

$$A: \{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\} \quad B: \{0, 0, \pi, \pi\} \quad C: N.A. \quad D: \{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\} \quad E: \{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$$

2. La funzione  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \log(1+x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

A: è derivabile, ma non continua. B: è continua e derivabile. C: è continua, ma non derivabile. D: N.A. E: non è né continua né derivabile.

3. Dati  $\alpha > 0$  e  $f_\alpha(x) = 3(\log(\alpha x))$ . Allora  $f'_\alpha(e)$  è uguale a

$$A: \alpha \log(3e) \quad B: \frac{3\alpha}{e} \quad C: \frac{e^3}{\alpha} \quad D: \frac{3}{e} \quad E: N.A.$$

4. La funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = |x|^{20}$  è

A: surgettiva B: monotona crescente C: iniettiva D: N.A. E: derivabile ovunque

5. La retta tangente al grafico di  $y(x) = \sin(\sin(x))$  nel punto  $x_0 = 0$  vale

$$A: 1 + x + x^2 \quad B: 1 + x \quad C: N.A. \quad D: 1 + \sin(x)x \quad E: 1 + 2x - \frac{\pi}{2}$$

6. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^3 + \cos(x))}{3 \log(\log(x))}$$

vale

$$A: 0 \quad B: N.E. \quad C: +\infty \quad D: N.A. \quad E: 1$$

7. La serie a termini non-negativi

$$\sum_{n > [\pi]}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^2} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

converge per

$$A: 3 < \alpha < \pi \quad B: \alpha > 1 \quad C: N.A. \quad D: \alpha \geq 1 \quad E: \alpha > 2$$

8. L'integrale

$$\int_{-1}^2 |x|^2 dx$$

vale

$$A: 0 \quad B: 3 \quad C: N.A. \quad D: \sqrt{2} \quad E: 7/2$$

9. Modulo e argomento del numero complesso  $z = i^{44}$  sono

$$A: (2, 2\pi/3) \quad B: (2, 44\pi) \quad C: N.A. \quad D: (1, 44\pi) \quad E: (1, 3\pi/2)$$

10. La derivata della funzione  $x(t) = \int_0^{t^2+1} \sin(z) dz$  vale

$$A: N.E. \quad B: N.A. \quad C: 2t \sin(t^2 + 1) \quad D: \sin(t^2) \quad E: 2t \sin(t^2)$$

**CODICE=214292**

**CODICE=214292**

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica  
Prova di Analisi Matematica 1

9 Settembre 2024

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

**CODICE=006124**



## PARTE A

1. La serie a termini non-negativi

$$\sum_{n > [\pi]}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^2} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

converge per

A:  $\alpha > 1$  B: N.A. C:  $\alpha > 2$  D:  $\alpha \geq 1$  E:  $3 < \alpha < \pi$

2. La derivata della funzione  $x(t) = \int_0^{t^2+1} \sin(z) dz$  vale

A:  $\sin(t^2)$  B: N.A. C:  $2t \sin(t^2)$  D:  $2t \sin(t^2 + 1)$  E: N.E.

3. La funzione  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \log(1+x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

A: è continua e derivabile. B: è continua, ma non derivabile. C: non è né continua né derivabile. D: N.A. E: è derivabile, ma non continua.

4. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) \cos(x) < 0\}$$

valgono

A:  $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$  B:  $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$  C: N.A. D:  $\{0, 0, \pi, \pi\}$  E:  $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$

5. Modulo e argomento del numero complesso  $z = i^{44}$  sono

A:  $(2, 2\pi/3)$  B:  $(1, 44\pi)$  C:  $(1, 3\pi/2)$  D:  $(2, 44\pi)$  E: N.A.

6. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^3 + \cos(x))}{3 \log(\log(x))}$$

vale

A: N.E. B: 0 C: N.A. D:  $+\infty$  E: 1

7. La retta tangente al grafico di  $y(x) = \sin(\sin(x))$  nel punto  $x_0 = 0$  vale

A:  $1 + 2x - \frac{\pi}{2}$  B:  $1 + x$  C: N.A. D:  $1 + x + x^2$  E:  $1 + \sin(x)x$

8. L'integrale

$$\int_{-1}^2 |x|^2 dx$$

vale

A: 3 B: 0 C:  $7/2$  D:  $\sqrt{2}$  E: N.A.

9. Dati  $\alpha > 0$  e  $f_\alpha(x) = 3(\log(\alpha x))$ . Allora  $f'_\alpha(e)$  è uguale a

A:  $\frac{3\alpha}{e}$  B:  $\alpha \log(3e)$  C:  $\frac{e^3}{\alpha}$  D: N.A. E:  $\frac{3}{e}$

10. La funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = |x|^{20}$  è

A: surgettiva B: monotona crescente C: N.A. D: derivabile ovunque E: iniettiva

**CODICE=006124**

**CODICE=006124**

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica  
Prova di Analisi Matematica 1

9 Settembre 2024

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

**CODICE=985823**



**PARTE A**

1. Modulo e argomento del numero complesso  $z = i^{44}$  sono  
A: N.A. B:  $(2, 44\pi)$  C:  $(2, 2\pi/3)$  D:  $(1, 3\pi/2)$  E:  $(1, 44\pi)$

2. Dati  $\alpha > 0$  e  $f_\alpha(x) = 3(\log(\alpha x))$ . Allora  $f'_\alpha(e)$  è uguale a  
A:  $\frac{3}{e}$  B:  $\frac{e^3}{\alpha}$  C: N.A. D:  $\alpha \log(3e)$  E:  $\frac{3\alpha}{e}$

3. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^3 + \cos(x))}{3 \log(\log(x))}$$

vale

- A:  $+\infty$  B: N.A. C: 1 D: 0 E: N.E.

4. L'integrale

$$\int_{-1}^2 |x|^2 dx$$

vale

- A: 0 B:  $7/2$  C: 3 D: N.A. E:  $\sqrt{2}$

5. La retta tangente al grafico di  $y(x) = \sin(\sin(x))$  nel punto  $x_0 = 0$  vale

- A:  $1 + x + x^2$  B:  $1 + x$  C:  $1 + \sin(x)x$  D:  $1 + 2x - \frac{\pi}{2}$  E: N.A.

6. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) \cos(x) < 0\}$$

valgono

- A:  $\{0, 0, \pi, \pi\}$  B:  $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$  C:  $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$  D: N.A. E:  $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$

7. La serie a termini non-negativi

$$\sum_{n > [\pi]}^{\infty} \frac{1 + n^2}{n^2} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

converge per

- A: N.A. B:  $3 < \alpha < \pi$  C:  $\alpha \geq 1$  D:  $\alpha > 1$  E:  $\alpha > 2$

8. La derivata della funzione  $x(t) = \int_0^{t^2+1} \sin(z) dz$  vale

- A:  $2t \sin(t^2)$  B: N.E. C: N.A. D:  $2t \sin(t^2 + 1)$  E:  $\sin(t^2)$

9. La funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = |x|^{20}$  è

- A: N.A. B: iniettiva C: monotona crescente D: surgettiva E: derivabile ovunque

10. La funzione  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \log(1+x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

- A: non è né continua né derivabile. B: è derivabile, ma non continua. C: è continua e derivabile. D: N.A. E: è continua, ma non derivabile.

**CODICE=985823**

**CODICE=985823**

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica  
Prova di Analisi Matematica 1

9 Settembre 2024

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer, dispositivi connessi alla rete.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

**CODICE=619235**



**PARTE A**

1. La funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = |x|^{20}$  è  
A: monotona crescente    B: iniettiva    C: N.A.    D: surgettiva    E: derivabile ovunque

2. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) \cos(x) < 0\}$$

valgono

- A:  $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$     B:  $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$     C:  $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$     D:  $\{0, 0, \pi, \pi\}$   
E: N.A.

3. La retta tangente al grafico di  $y(x) = \sin(\sin(x))$  nel punto  $x_0 = 0$  vale

- A:  $1 + 2x - \frac{\pi}{2}$     B: N.A.    C:  $1 + \sin(x)x$     D:  $1 + x$     E:  $1 + x + x^2$

4. L'integrale

$$\int_{-1}^2 |x|^2 dx$$

vale

- A: 0    B: N.A.    C:  $7/2$     D:  $\sqrt{2}$     E: 3

5. La funzione  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \log(1+x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

A: è derivabile, ma non continua.    B: è continua e derivabile.    C: è continua, ma non derivabile.    D: non è né continua né derivabile.    E: N.A.

6. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^3 + \cos(x))}{3 \log(\log(x))}$$

vale

- A:  $+\infty$     B: 0    C: 1    D: N.E.    E: N.A.

7. Modulo e argomento del numero complesso  $z = i^{44}$  sono

- A: N.A.    B:  $(1, 3\pi/2)$     C:  $(2, 2\pi/3)$     D:  $(1, 44\pi)$     E:  $(2, 44\pi)$

8. La derivata della funzione  $x(t) = \int_0^{t^2+1} \sin(z) dz$  vale

- A:  $2t \sin(t^2 + 1)$     B:  $\sin(t^2)$     C: N.E.    D: N.A.    E:  $2t \sin(t^2)$

9. Dati  $\alpha > 0$  e  $f_\alpha(x) = 3(\log(\alpha x))$ . Allora  $f'_\alpha(e)$  è uguale a

- A: N.A.    B:  $\frac{3}{e}$     C:  $\frac{3\alpha}{e}$     D:  $\alpha \log(3e)$     E:  $\frac{e^3}{\alpha}$

10. La serie a termini non-negativi

$$\sum_{n > [\pi]}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^2} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

converge per

- A:  $\alpha \geq 1$     B:  $\alpha > 2$     C:  $3 < \alpha < \pi$     D:  $\alpha > 1$     E: N.A.

**CODICE=619235**

**CODICE=619235**



**CODICE=214292**



**CODICE=006124**



**CODICE=985823**



**CODICE=619235**

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica  
Prova di Analisi Matematica 1

9 Settembre 2024

1 Studiare, al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$  la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{2 - \lambda|x|}$$

determinandone insieme di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore o massimo e minimo.

**Soluzione.** Osserviamo intanto che la funzione è definita per  $x \in \mathbb{R}$ , risulta continua in tutto il dominio e che è una funzione pari. Pertanto ci basta studiarla per  $x \geq 0$  ed è quello che faremo. Osserviamo che

$$\text{se } \lambda > 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e se } \lambda < 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

quindi nel primo caso non c'è minimo, mentre nel secondo non c'è massimo.

Inoltre  $\frac{d}{dx} \sqrt[3]{2 - \lambda x} = -\frac{\lambda}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(2 - \lambda x)^2}}$ , che risulta negativa per  $\lambda > 0$  e positiva altrimenti.

Notiamo che la derivata non esiste per  $x = 2/\lambda$ , nel caso  $\lambda > 0$ .

La funzione  $f$  risulta pertanto monotona decrescente per  $\lambda > 0$  (massimo  $\sqrt[3]{2}$  raggiunto per  $x = 0$ ) e crescente per  $\lambda < 0$  (minimo  $\sqrt[3]{2}$  raggiunto per  $x = 0$ .) Per  $\lambda \neq 0$  la funzione non risulta derivabile per  $x = 0$ . La funzione non ha asintoti verticali o obliqui e calcolando la derivata seconda

$$\frac{d^2}{dx^2} \sqrt[3]{2 - \lambda x} = -\frac{2\lambda^2}{9(2 - \lambda x)^{5/3}}$$

si ha che, per  $\lambda > 0$  la funzione  $f$  risulta concava per  $|x| < 2/\lambda$  e convessa per  $x < -2/\lambda$  e  $x > 2/\lambda$ , mentre per  $\lambda < 0$  la funzione risulta concava per  $x < 0$  e per  $x > 0$ .

2 Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3(x)}{1 + \sin^2(x)} dx.$$

**Soluzione.** Con la sostituzione  $t = \sin(x)$ , si ha  $dt = \cos(x)dx$  e l'integrale diventa

$$\int_0^1 \frac{1 - t^2}{1 + t^2} dt = \int_0^1 \frac{2}{1 + t^2} - 1 dt = 2 \arctan(t) - t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

3 Risolvere

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = y^2(x) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

ed eventualmente determinare per quali  $y_0$  la soluzione è definita per tutti le  $x > 0$ .

**Soluzione.** Si tratta di una equazione a variabili separabili, e si nota meglio scrivendola come segue  $y'(x) = y^2(x) - y(x)$ .

Separando la variabili di ha

$$\int \frac{dz}{z^2 - z} = \int dx,$$

da cui  $y(x) = \frac{1}{1+e^{x+c_1}}$  e imponendo le condizioni iniziali si ha

$$y(x) = \frac{y_0}{y_0 + e^x(1 - y_0)}.$$

La soluzione è definita per tutte le  $x > 0$  se

$$y_0 + e^x(1 - y_0) > 0,$$

e questo equivale a chiedere  $0 \leq 1 - y_0$ , cioè  $y_0 \leq 1$ .

4 Siano  $\sum_n a_n$  e  $\sum_n b_n$  due serie a termini non-negativi. Determinare se esistono casi in cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{b_n} = k,$$

per qualche  $k \in \mathbb{R}$  e la prima serie converge, mentre la seconda diverge.

**Soluzione.** Se  $k < 1$  la serie converge, mentre se  $k > 1$  diverge, quindi l'unico caso in cui il limite esiste e il comportamento può essere diverso è se  $k = 1$ . Per fornire un esempio osserviamo che se scegliamo  $a_n = \frac{1}{n^2}$  e  $b_n = \frac{1}{n}$  si ha che una serie diverge, l'altra converge, ma in entrambi i casi  $k = 1$ .