

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 luglio 2023

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, solo il foglio A4 di appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=582177

PARTE A

1. Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda^2 - 2\lambda + 1}},$$

converge per tutti i λ tali che

A: $\lambda > 1$ B: $\lambda \geq 1$ C: $\lambda \neq 0$ D: N.A. E: $\{\lambda < 0\} \cup \{\lambda > 2\}$

2. Il numero di soluzioni distinte dell'equazione complessa $z^2 = z^5$ è

A: N.A. B: 5/2 C: 4 D: 3 E: 2

3. Parte reale e coefficiente della parte immaginaria di $z = (\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))^2$ sono

A: (2, 2 π) B: N.A. C: (1, $\pi/2$) D: (0, 1) E: (1, 1)

4. Data $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$. Allora $f'(0)$ è uguale a

A: N.A. B: 1 C: 1/2 D: N.E. E: 0

5. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{y = |(x-1)(x-2)|, x \in [2, \infty[\},$$

valgono

A: $\{2, 2, +\infty, N.E.\}$ B: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ C: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ D: N.A. E: $\{1, 1, 2, 2\}$

6. La soluzione di $y'(x) = e^{\sqrt{x^3}}$ con la condizione iniziale $y(0) = 0$

A: non si annulla mai B: N.A. C: è crescente D: è costante E: è decrescente

7. L'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx,$$

vale

A: $\pi/4$ B: π C: 1/2 D: N.A. E: 1

8. La funzione $f(x) = \begin{cases} \sin(\log(x)) & \text{per } x \geq 1 \\ x^2 - 1 & \text{per } x < 1 \end{cases}$ è

A: N.A. B: continua ma non derivabile C: derivabile ma non continua D: non continua e non derivabile E: continua e derivabile

9. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\log(-\log(x))}$$

vale

A: $-\infty$ B: $+\infty$ C: N.E. D: 0 E: N.A.

10. Data la funzione $\log(x)^{\log(x)}$, allora $f'(e)$ vale

A: 1/e B: 2 C: N.A. D: -1 E: $\log(e)$

CODICE=582177

CODICE=582177

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 luglio 2023

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, solo il foglio A4 di appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=139471

PARTE A

1. Data $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$. Allora $f'(0)$ è uguale a
A: 1/2 B: 0 C: 1 D: N.E. E: N.A.

2. L'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx,$$

vale

- A: π B: 1 C: $\pi/4$ D: N.A. E: 1/2

3. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\log(-\log(x))}$$

vale

- A: 0 B: N.E. C: N.A. D: $-\infty$ E: $+\infty$

4. Data la funzione $\log(x)^{\log(x)}$, allora $f'(e)$ vale

- A: $\log(e)$ B: -1 C: N.A. D: 2 E: 1/e

5. Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda^2 - 2\lambda + 1}},$$

converge per tutti i λ tali che

- A: $\lambda \neq 0$ B: $\{\lambda < 0\} \cup \{\lambda > 2\}$ C: $\lambda \geq 1$ D: $\lambda > 1$ E: N.A.

6. Parte reale e coefficiente della parte immaginaria di $z = (\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))^2$ sono

- A: N.A. B: $(2, 2\pi)$ C: $(1, 1)$ D: $(0, 1)$ E: $(1, \pi/2)$

7. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{y = |(x-1)(x-2)|, x \in [2, \infty[\},$$

valgono

- A: $\{1, 1, 2, 2\}$ B: N.A. C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ E: $\{2, 2, +\infty, N.E.\}$

8. La funzione $f(x) = \begin{cases} \sin(\log(x)) & \text{per } x \geq 1 \\ x^2 - 1 & \text{per } x < 1 \end{cases}$ è

- A: continua e derivabile B: non continua e non derivabile C: N.A. D: derivabile ma non continua E: continua ma non derivabile

9. La soluzione di $y'(x) = e^{\sqrt{x^3}}$ con la condizione iniziale $y(0) = 0$

- A: non si annulla mai B: N.A. C: è costante D: è decrescente E: è crescente

10. Il numero di soluzioni distinte dell'equazione complessa $z^2 = z^5$ è

- A: 4 B: 5/2 C: N.A. D: 2 E: 3

CODICE=139471

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 luglio 2023

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, solo il foglio A4 di appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=481336

PARTE A

1. La soluzione di $y'(x) = e^{\sqrt{x^3}}$ con la condizione iniziale $y(0) = 0$
A: è crescente B: N.A. C: è costante D: non si annulla mai E: è decrescente

2. Il numero di soluzioni distinte dell'equazione complessa $z^2 = z^5$ è
A: 4 B: N.A. C: 5/2 D: 2 E: 3

3. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\log(-\log(x))}$$

vale

A: N.A. B: 0 C: $-\infty$ D: $+\infty$ E: N.E.

4. Data $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$. Allora $f'(0)$ è uguale a
A: 0 B: N.A. C: 1/2 D: 1 E: N.E.

5. La funzione $f(x) = \begin{cases} \sin(\log(x)) & \text{per } x \geq 1 \\ x^2 - 1 & \text{per } x < 1 \end{cases}$ è

A: N.A. B: derivabile ma non continua C: continua ma non derivabile D: continua e derivabile E: non continua e non derivabile

6. Parte reale e coefficiente della parte immaginaria di $z = (\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))^2$ sono
A: (0, 1) B: (2, 2 π) C: (1, $\pi/2$) D: N.A. E: (1, 1)

7. Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda^2 - 2\lambda + 1}},$$

converge per tutti i λ tali che

A: $\lambda > 1$ B: $\lambda \neq 0$ C: N.A. D: $\{\lambda < 0\} \cup \{\lambda > 2\}$ E: $\lambda \geq 1$

8. Data la funzione $\log(x)^{\log(x)}$, allora $f'(e)$ vale
A: N.A. B: 2 C: 1/e D: -1 E: $\log(e)$

9. L'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx,$$

vale

A: π B: 1 C: 1/2 D: $\pi/4$ E: N.A.

10. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{y = |(x-1)(x-2)|, x \in [2, \infty[\},$$

valgono

A: N.A. B: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ C: $\{2, 2, +\infty, N.E.\}$ D: $\{1, 1, 2, 2\}$ E: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$

CODICE=481336

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 luglio 2023

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, manuali, solo il foglio A4 di appunti.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=434302

PARTE A

1. L'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx,$$

vale

A: 1 B: N.A. C: $\pi/4$ D: $1/2$ E: π

2. Data la funzione $\log(x)^{\log(x)}$, allora $f'(e)$ vale

A: N.A. B: -1 C: 2 D: $\log(e)$ E: $1/e$

3. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\log(-\log(x))}$$

vale

A: N.A. B: $+\infty$ C: N.E. D: $-\infty$ E: 0

4. Parte reale e coefficiente della parte immaginaria di $z = (\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))^2$ sono

A: $(2, 2\pi)$ B: N.A. C: $(1, 1)$ D: $(1, \pi/2)$ E: $(0, 1)$

5. Il numero di soluzioni distinte dell'equazione complessa $z^2 = z^5$ è

A: 2 B: 4 C: $5/2$ D: 3 E: N.A.

6. Data $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$. Allora $f'(0)$ è uguale a

A: 1 B: $1/2$ C: 0 D: N.E. E: N.A.

7. La funzione $f(x) = \begin{cases} \sin(\log(x)) & \text{per } x \geq 1 \\ x^2 - 1 & \text{per } x < 1 \end{cases}$ è

A: non continua e non derivabile B: continua ma non derivabile C: N.A. D: continua e derivabile E: derivabile ma non continua

8. Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda^2 - 2\lambda + 1}},$$

converge per tutti i λ tali che

A: $\{\lambda < 0\} \cup \{\lambda > 2\}$ B: $\lambda > 1$ C: N.A. D: $\lambda \neq 0$ E: $\lambda \geq 1$

9. La soluzione di $y'(x) = e^{\sqrt{x^3}}$ con la condizione iniziale $y(0) = 0$

A: è costante B: N.A. C: non si annulla mai D: è crescente E: è decrescente

10. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{y = |(x-1)(x-2)|, x \in [2, \infty[\},$$

valgono

A: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{2, 2, +\infty, N.E.\}$ E: $\{1, 1, 2, 2\}$

CODICE=434302

CODICE=434302

CODICE=582177

CODICE=139471

CODICE=481336

CODICE=434302

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 luglio 2023

PARTE B

1 Trovare, al variare di $\lambda > 0$, il massimo (se esiste) di

$$f(x) = x e^{-x^\lambda} \quad x \geq 0.$$

e studiarne l'eventuale andamento per $\lambda \rightarrow +\infty$.

Soluzione: Per ogni $\lambda > 0$ si ha

$$f(x) \geq 0 \quad f(0) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

La funzione f risulta derivabile con continuità e

$$f'(x) = e^{-x^\lambda} (1 - \lambda x^\lambda),$$

pertanto la funzione risulta strettamente crescente per $0 < x < 1/(\lambda^{1/\lambda})$ e decrescente per $x > 1/(\lambda^{1/\lambda})$. Si ha quindi punto di massimo relativo, ma in realtà, dato l'andamento agli estremi, assoluto in $x_\lambda = 1/(\lambda^{1/\lambda})$. Il massimo vale quindi

$$M_\lambda = f(1/(\lambda^{1/\lambda})) = \frac{1}{\lambda^{1/\lambda}} e^{-1/\lambda}.$$

Si ha quindi che

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} M_\lambda = 1.$$

Osserviamo che calcolando il limite $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(x)$ si ottiene la funzione discontinua che vale x per $x \in [0, 1[$, $1/e$ per $x = 1$ e 0 altrove e che non ha massimo.

2 Risolvere l'equazione differenziale

$$y''(t) - y(t) = e^t + e^{-t},$$

Soluzione: Risolviamo intanto l'omogenea associata $Y''(t) - Y(t) = 0$; l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 1 = 0$ che ha soluzioni $\lambda = \pm 1$. Le soluzioni della omogenea sono quindi

$$Y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

La soluzione particolare va cercata della forma $y_{f_1} + y_{f_2}$ e in entrambi i casi c'è risonanza (due radici semplici) e pertanto

$$y_{f_1}(t) = a_1 t e^t \quad y_{f_2}(t) = a_2 t e^{-t}.$$

Sostituendo e svolgendo i calcoli si trova

$$y_{f_1}(t) = \frac{t}{2}e^t \quad y_{f_2}(t) = -\frac{t}{2}e^{-t}.$$

e pertanto integrale generale risulta essere

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{t}{2}e^t - \frac{t}{2}e^{-t}.$$

3 Determinare la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(1/n) - \arctan(1/n)$$

Soluzione: Il termine generico della serie risulta

$$a_n = \sin(1/n) - \arctan(1/n) \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

e si può verificare che si tratta di una serie a termini non negativi. Osservando che $\sin(x) - \tan^{-1}(x) = \frac{x^3}{6} + O(x^4)$ si ha

$$\sin(1/n) - \arctan(1/n) = \frac{1}{6n^3} + o(1/n^3)$$

e quindi la serie risulta assolutamente convergente.

4 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che esiste finito $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Studiare se $\lim_{x \rightarrow 0} f \circ f = (f \circ f)(0)$.

Soluzione: Se la funzione f è continua dappertutto si ha ovviamente che $\lim_{x \rightarrow 0} f \circ f = (f \circ f)(0)$. Tale affermazione potrebbe non essere vera se f non fosse continua. Consideriamo pertanto la funzione elementare, non continua in un punto,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

ma con limite finito in tale punto dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Calcolando esplicitamente la funzione composta si ha

$$g(x) = (f \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} f \circ f = 1 \quad \text{mentre } f(f(0)) = 0.$$