Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2023

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, manuali, solo il foglio A4 di appunti.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=775235

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=775235

PARTE A

1. Dato $x \leq 0$, la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$$
converge per
A: $-1 < x < 0$ B: $x < -1/2$ C: N.A. D: $-1/5 < x \leq 0$ E: $x < 0$

2. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = x^2 \mathrm{e}^{x^3}$ è
A: $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ B: N.E. C: N.A. D: $\frac{1}{\cos(x)}$ E: $\frac{\mathrm{e}^{x^3} + \log(\log(e^{4^\pi}))}{3}$

3. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x^2 + \log(b)|$ è derivabile in ogni punto per
A: N.A. B: $b = -2$ C: $b \geq 1$ D: $|b| \geq 1$ E: $b > 0$

4. L'integrale
$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} 2t \cos(t)\, dt$$
vale
A: $\sqrt{3}/4$ B: $\sqrt{\mathrm{e}} + 1$ C: N.E. D: N.A. E: $\frac{1}{6}\left(-6 + 3\sqrt{3} - \pi\right)$

5. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(1+i\right)^{-4}$ sono
A: $(4, \pi)$ B: $(27, 2\pi)$ C: $(3^4, \pi/2)$ D: N.A. E: $(1/4, \pi)$

6. Data $f(x) = (\log(x))^x$. Allora $f''(\mathrm{e})$ è uguale a
A: e^2 B: N.A. C: $3\mathrm{e}^3$ D: $\log(2\mathrm{e})$ E: 1

7. Il limite
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(\sin(x^3))}{x^3}$$
vale
A: N.E. B: $-\infty$ C: $+\infty$ D: $-1/2$ E: N.A.

8. La retta tangente al grafico di $y(x) = \arctan(\log(x))$ nel punto $x_0 = 1$ vale
A: $\frac{1}{1+\log^2(x)}$ B: $x - 1$ C: N.A. D: $1 + \frac{x-1}{4\sqrt{2}}$ E: $1 + x$

9. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{y = \mathrm{e}^{-2x^2},\ x \in]1, 2]\}$$
valgono
A: N.A. B: $\{0, 0, \mathrm{e}^{-4}, N.E.\}$ C: $\{0, N.E., 1, 1\}$ D: $\{1/\mathrm{e}^4, 1/\mathrm{e}^4, 1/\mathrm{e}, N.E.\}$ E: $\{1/\mathrm{e}^8, 1/\mathrm{e}^8, 1/\mathrm{e}^2, N.E.\}$

10. La funzione $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{2x} & \text{per } x < 1 \\ ax + b & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$ è derivabile per
A: $b = 0$ e $a \geq 0$ B: N.A. C: $(a, b) = (\mathrm{e}^2, -\mathrm{e}^2)$ D: $(a, b) = (0, \mathrm{e})$ E: $(a, b) = (2\mathrm{e}, 0)$

CODICE=775235

CODICE=775235

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2023

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, manuali, solo il foglio A4 di appunti.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=970305

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=970305

PARTE A

1. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x^2 + \log(b)|$ è derivabile in ogni punto per

   A: $b = -2$ B: $b > 0$ C: $|b| \geq 1$ D: $b \geq 1$ E: N.A.

2. Dato $x \leq 0$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$$

   converge per

   A: $-1 < x < 0$ B: $-1/5 < x \leq 0$ C: $x < 0$ D: $x < -1/2$ E: N.A.

3. La retta tangente al grafico di $y(x) = \arctan(\log(x))$ nel punto $x_0 = 1$ vale

   A: $\frac{1}{1+\log^2(x)}$ B: N.A. C: $x - 1$ D: $1 + \frac{x-1}{4\sqrt{2}}$ E: $1 + x$

4. Il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(\sin(x^3))}{x^3}$$

   vale

   A: $-1/2$ B: N.A. C: $-\infty$ D: $+\infty$ E: N.E.

5. L'integrale

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} 2t\, \cos(t)\, dt$$

   vale

   A: N.E. B: $\sqrt{\mathrm{e}} + 1$ C: $\sqrt{3}/4$ D: N.A. E: $\frac{1}{6}\left(-6 + 3\sqrt{3} - \pi\right)$

6. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{y = \mathrm{e}^{-2x^2},\ x \in]1, 2]\}$$

   valgono

   A: $\{0, 0, \mathrm{e}^{-4}, N.E.\}$ B: $\{0, N.E., 1, 1\}$ C: N.A. D: $\{1/\mathrm{e}^4, 1/\mathrm{e}^4, 1/\mathrm{e}, N.E.\}$ E: $\{1/\mathrm{e}^8, 1/\mathrm{e}^8, 1/\mathrm{e}^2, N.E.\}$

7. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = x^2 \mathrm{e}^{x^3}$ è

   A: N.A. B: $\frac{\mathrm{e}^{x^3} + \log(\log(e^{4^\pi}))}{3}$ C: N.E. D: $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ E: $\frac{1}{\cos(x)}$

8. La funzione $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{2x} & \text{per } x < 1 \\ ax + b & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$ è derivabile per

   A: $(a, b) = (2\mathrm{e}, 0)$ B: $(a, b) = (\mathrm{e}^2, -\mathrm{e}^2)$ C: $(a, b) = (0, \mathrm{e})$ D: $b = 0$ e $a \geq 0$ E: N.A.

9. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(1 + i\right)^{-4}$ sono

   A: $(4, \pi)$ B: $(27, 2\pi)$ C: $(3^4, \pi/2)$ D: $(1/4, \pi)$ E: N.A.

10. Data $f(x) = (\log(x))^x$. Allora $f''(\mathrm{e})$ è uguale a

    A: 1 B: $\log(2\mathrm{e})$ C: N.A. D: e^2 E: $3\mathrm{e}^3$

CODICE=970305

CODICE=970305

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2023

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, manuali, solo il foglio A4 di appunti.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=584481

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=584481

PARTE A

1. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = x^2 e^{x^3}$ è

   A: $e^x - e^{-x}$ B: $\frac{e^{x^3}+\log(\log(e^{4\pi}))}{3}$ C: N.A. D: N.E. E: $\frac{1}{\cos(x)}$

2. La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{per } x < 1 \\ ax + b & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$ è derivabile per

   A: $b = 0$ e $a \geq 0$ B: N.A. C: $(a, b) = (2e, 0)$ D: $(a, b) = (e^2, -e^2)$ E: $(a, b) = (0, e)$

3. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x^2 + \log(b)|$ è derivabile in ogni punto per

   A: $b = -2$ B: $|b| \geq 1$ C: N.A. D: $b \geq 1$ E: $b > 0$

4. Dato $x \leq 0$, la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$$
   converge per

   A: N.A. B: $-1 < x < 0$ C: $x < -1/2$ D: $x < 0$ E: $-1/5 < x \leq 0$

5. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(1 + i\right)^{-4}$ sono

   A: $(3^4, \pi/2)$ B: $(27, 2\pi)$ C: $(4, \pi)$ D: $(1/4, \pi)$ E: N.A.

6. Il limite
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(\sin(x^3))}{x^3}$$
   vale

   A: N.A. B: $-1/2$ C: N.E. D: $+\infty$ E: $-\infty$

7. La retta tangente al grafico di $y(x) = \arctan(\log(x))$ nel punto $x_0 = 1$ vale

   A: $\frac{1}{1+\log^2(x)}$ B: $x - 1$ C: $1 + x$ D: $1 + \frac{x-1}{4\sqrt{2}}$ E: N.A.

8. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{y = e^{-2x^2},\ x \in]1, 2]\}$$
   valgono

   A: $\{0, 0, e^{-4}, N.E.\}$ B: $\{0, N.E., 1, 1\}$ C: $\{1/e^8, 1/e^8, 1/e^2, N.E.\}$ D: $\{1/e^4, 1/e^4, 1/e, N.E.\}$
   E: N.A.

9. Data $f(x) = (\log(x))^x$. Allora $f''(e)$ è uguale a

   A: N.A. B: $\log(2e)$ C: e^2 D: $3e^3$ E: 1

10. L'integrale
$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} 2t\,\cos(t)\,dt$$
    vale

    A: $\frac{1}{6}\left(-6 + 3\sqrt{3} - \pi\right)$ B: $\sqrt{3}/4$ C: N.A. D: N.E. E: $\sqrt{e} + 1$

CODICE=584481

CODICE=584481

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2023

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, manuali, solo il foglio A4 di appunti.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=157635

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=157635

PARTE A

1. Dato $x \leq 0$, la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$$
converge per
A: $-1 < x < 0$ B: $x < 0$ C: $x < -1/2$ D: N.A. E: $-1/5 < x \leq 0$

2. L'integrale
$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} 2t\, \cos(t)\, dt$$
vale
A: N.E. B: $\sqrt{3}/4$ C: $\sqrt{\mathrm{e}}+1$ D: $\frac{1}{6}\left(-6+3\sqrt{3}-\pi\right)$ E: N.A.

3. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = x^2 \mathrm{e}^{x^3}$ è
A: $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ B: $\frac{\mathrm{e}^{x^3}+\log(\log(e^{4^\pi}))}{3}$ C: N.E. D: $\frac{1}{\cos(x)}$ E: N.A.

4. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{y = \mathrm{e}^{-2x^2},\ x \in]1,2]\}$$
valgono
A: $\{0, N.E., 1, 1\}$ B: $\{1/\mathrm{e}^8, 1/\mathrm{e}^8, 1/\mathrm{e}^2, N.E.\}$ C: $\{1/\mathrm{e}^4, 1/\mathrm{e}^4, 1/\mathrm{e}, N.E.\}$ D: N.A. E: $\{0, 0, \mathrm{e}^{-4}, N.E.\}$

5. Data $f(x) = (\log(x))^x$. Allora $f''(\mathrm{e})$ è uguale a
A: N.A. B: $\log(2\mathrm{e})$ C: e^2 D: 1 E: $3\mathrm{e}^3$

6. La funzione $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{2x} & \text{per } x < 1 \\ ax+b & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$ è derivabile per
A: $b = 0$ e $a \geq 0$ B: $(a,b) = (0, \mathrm{e})$ C: $(a,b) = (\mathrm{e}^2, -\mathrm{e}^2)$ D: N.A. E: $(a,b) = (2\mathrm{e}, 0)$

7. La retta tangente al grafico di $y(x) = \arctan(\log(x))$ nel punto $x_0 = 1$ vale
A: $\frac{1}{1+\log^2(x)}$ B: N.A. C: $x-1$ D: $1 + \frac{x-1}{4\sqrt{2}}$ E: $1+x$

8. Il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\sin(x^3))}{x^3}$$
vale
A: $-\infty$ B: N.A. C: $+\infty$ D: $-1/2$ E: N.E.

9. La funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x^2 + \log(b)|$ è derivabile in ogni punto per
A: $|b| \geq 1$ B: $b \geq 1$ C: $b = -2$ D: N.A. E: $b > 0$

10. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(1+i\right)^{-4}$ sono
A: $(4, \pi)$ B: $(3^4, \pi/2)$ C: $(27, 2\pi)$ D: N.A. E: $(1/4, \pi)$

CODICE=157635

CODICE=157635

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	●	○	○
4	○	○	○	●	○
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	○	●	○	○	○
8	○	●	○	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	●	○	○	○

CODICE=775235

CODICE=775235

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	●	○	○
4	○	○	●	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	○	○	●
7	○	●	○	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	●	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=970305

CODICE=970305

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	●	○
6	○	○	○	○	●
7	○	●	○	○	○
8	○	○	●	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	○	●	○	○

CODICE=584481

CODICE=584481

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	○	○	●
3	○	●	○	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	○	●	○
7	○	○	●	○	○
8	●	○	○	○	○
9	○	●	○	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=157635

CODICE=157635

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2023

PARTE B

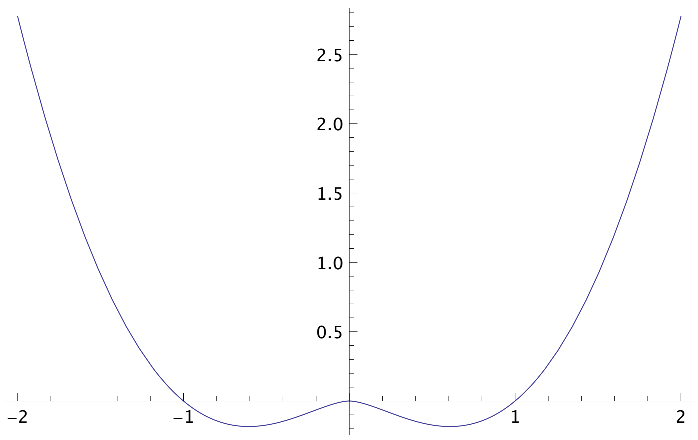
1 Trovare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^2 \log(|x|) = \lambda.$$

Soluzione. La funzione $f(x) = x^2 \log(|x|)$ risulta definita per $x \neq 0$ e $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. La funzione risulsta pari, quindi ci basta studiarla per $x > 0$. In tal caso si ha che all'estremo destro del dominio $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e studiando la derivata per determinare intervalli di crescita

$$f'(x) = x + 2x \log(x)$$

che è negativa per $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$ e positiva per $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$. Si ha pertanto un minimo locale in $x_0 = \frac{1}{\sqrt{e}}$ e tale minimo vale $f(x_0) = -\frac{1}{2e}$. Tale minimo risulta anche assoluto. Il grafico approssimativo della funzione risulta quindi il seguente e pertanto non si hanno soluzioni se



$\lambda < -\frac{1}{2e}$, si hanno 4 soluzioni per $-\frac{1}{2e} < \lambda < 0$ e si hanno 2 soluzioni per $\lambda = -\frac{1}{2e}$ e per $\lambda \geq 0$.

2 Risolvere per $\kappa \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) = t + 1, \\ y(0) = \kappa, \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

CODICE=157635

Soluzione. Le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 - \lambda = 0$ sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$, pertanto l'equazione omogenea associata ha come soluzioni $Y(t) = c_1 + c_2 e^t$. La soluzione particolare, dato che c'è risonanza, va cercata della forma

$$y_f(t) = t(at + b).$$

Svolgendo i calcoli si trova $y_f(t) = -2t - \frac{t^2}{2}$, pertanto l'integrale generale risulta $y(t) = c_1 + c_2 e^t - 2t - \frac{t^2}{2}$. Imponendo poi le condizioni iniziali si trova

$$y(t) = -2 + 2e^t - 2t - \frac{t^2}{2} + \kappa.$$

3 Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{x \log(2 + x)}{x^3 + 1} \, dx.$$

Soluzione. Si tratta di integrale improprio. Osserviamo intanto che il denominatore $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ si annulla solo per $x = -1$. Inoltre per $x \in [0, +\infty[$ la funzione f è positiva e continua. Per $x \to +\infty$ si ha che

$$f(x) \sim \frac{\log(x)}{x^2} < \frac{C}{x^{3/2}}$$

e pertanto integrale su $[1, \infty]$ converge. Osserviamo inoltre che l'integrale su $[0, 1]$ esiste perchè la funzione è continua. Passando all'intervallo $]-1, 0]$ possiamo osservare che in tale intervallo aperto la funzione risulta continua e inoltre applicando la formula de L'Hopital si ha

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\frac{1}{3},$$

pertanto la funzione integranda risulta limitata e prolungabile con continuità anche per $x = -1$ mostrando quindi che integrale su $[-1, 0]$ esiste finito.

4 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 convessa e invertibile e tale che $f'(x) \neq 0$. Discutere se la funzione inversa $g(y) = f^{-1}(y)$ risulta concava.

Soluzione. La derivata della funzione inversa di una funzione convessa non è necessariamente concava. Se $f(x) = e^{-x}$ allora $f^{-1}(y) = -\log(y)$ che è convessa. Viceversa Se $f(x) = e^x$ allora $f^{-1}(y) = \log(y)$ che è concava.

In generale osservando che la formula per la derivata della funzione inversa è $g'(y) = 1/f'(g(y))$, si ha

$$g''(y) = -\frac{f''(g(y))}{[f'(g(y))]^2} g'(y) = -\frac{f''(g(y))}{[f'(g(y))]^3},$$

e pertanto, $f'' \geq 0$ e se f' non si annulla, ha sempre lo stesso segno (altrimenti f non sarebbe invertibile) da cui otteniamo che g è concava se $f' > 0$, convessa nell'altro caso.

CODICE=157635