Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 2

31 gennaio 2023

1 Determinare se sulla semicirconferenza superiore di centro $(0,0)$ e raggio $R=1$ la funzione

$$f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$$

ha massimo e minimo assoluto ed eventualmente calcolarli.

Soluzione. La funzione è continua e D è chiuso e limitato, quindi massimo e minimo esistono. La funzione f è non-negativa e $f(1,0)=0$, quindi $x_0=(1,0)$ è punto di minimo e quello è anche l'unico punto stazionario dato che $\nabla f = (2(x-1), 2y)$. Cercando i massimi e minimi sul bordo si ha che per $x^2+y^2=1$

$$f(x,y) = x^2 - 2x + 1 + 1 - x^2 = 2 - 2x$$

che ha minimo per $x=1$ e massimo per $x=-1$ e quindi il massimo si ottiene in $(-1,0)$ dove f vale 4. Inoltre, se $y=0$ (parte inferiore del bordo) troviamo ancora gli stessi punti.

2 Calcolare

$$\iint_T y^2 x \, dxdy,$$

dove T è l'insieme dei punti del primo quadrante che dista dall'origine meno di 1 e che formano angolo con asse delle x minore di metà dell'angolo retto.

Soluzione. Passando alle coordinate polari l'integrale diventa

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/4} \rho^4 \cos(\theta) \sin^2(\theta) d\rho d\theta = \Big(\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^1 \Big) \Big(\frac{\sin(\theta)^3}{3}\Big|_0^{\pi/4} \Big) = \frac{1}{30\sqrt{2}}$$

3 Determinare se il campo

$$U(x,y) = (4x^3 \sin(y^2), 2x^4 \cos(y^2) y)$$

è conservativo e eventualmente determinare il potenziale.

Soluzione. Calcolando il rotore si ha

$$\frac{\partial}{\partial y} 4x^3 \sin(y^2) = \frac{\partial}{\partial x} 2x^4 \cos(y^2) y$$

e quindi il campo è irrotazionale, dato che il dominio è tutto lo spazio, risulta anche conservativo.

Si vede subito che U è il gradiente di $x^4 \sin(y^2)$, ma volendo svolgere i conti: scegliendo per cammino di integrazione da $(0,0)$ a $(0,x)$ $\gamma(t) = (tx, 0)$ si ottiene

$$\int_0^1 U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = 0$$

e scegliendo poi il cammino $\gamma(t) = (x, ty)$ che unisce $(0,x)$ a (x,y) si ha

$$\int_0^1 U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 2x^4 y^2 t \cos(t^2 y^2) dt = x^4 \sin(y^2).$$