Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 2

(Appello straordinario) 26 Novembre 2022

1 Determinare i piani orizzontali che sono tangenti alla superficie $z = f(x, y) = xy\, \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}$.

Soluzione. La funzione è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e quindi differenziabile. Calcolando le derivate parziali si ha

$$f_x = y(1 - x^2)\, \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2} \qquad \text{e} \qquad f_y = x(1 - y^2)\, \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2},$$

e quindi per trovare i piani orizzontali tangenti dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $x_1 = (0, 0)$ $x_2 = (1, 1)$, $x_3 = (-1, 1)$, $x_4 = (1, -1)$, e $x_5 = (-1, -1)$. I corrispondenti piani tangenti sono

$$\phi_1 = 0, \qquad \phi_2 = \phi_5 = \frac{1}{\mathrm{e}}, \qquad \phi_3 = \phi_4 = -\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

2 Determinare il valore massimo e il valore minimo (assoluti) di

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Come si può essere certi che tali valori esistano?

Soluzione. La funzione è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$ essendo rapporto di funzioni derivabili con continuità e il denominatore non si annulla mai. Osserviamo che

$$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} \frac{x}{1 + x^2 + y^2} = 0$$

e quindi la funzione risulta limitata, applicando il teorema di Weierstrass a una palla centrata nell'origine e di raggio opportuno. Calcolando il gradiente si ha

$$\nabla f = \left(\frac{1 - x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \right)$$

e i punti stazionari si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 1 - x^2 + y^2 = 0 \\ xy = 0, \end{cases}$$

che ha come soluzioni i punti $P_1 = (1,0)$ e $P_2 = (-1,0)$. Calcolando l'Hessiano si ha

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x\left(x^2-3\left(y^2+1\right)\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^3} & -\dfrac{2y\left(-3x^2+y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^3} \\ \\ -\dfrac{2y\left(-3x^2+y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^3} & -\dfrac{2x\left(x^2-3y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^3} \end{pmatrix}$$

e di conseguenza

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 \\ \\ 0 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad H(-1,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

quindi si ha che P_1 è punto di massimo locale mentre P_2 è punto di minimo locale; Inoltre

$$f(1,0) = \frac{1}{2} \qquad f(-1,0) = -\frac{1}{2}.$$

Osservando che dal limite all'infinito otteniamo che esiste $R > 1$ tale che $|f| < 1/4$ per $x^2 + y^2 > R^2$. Si ricava quindi che

$$\min_{B(0,R)} f = \min_{\mathbb{R}^2} f \qquad \max_{B(0,R)} f = \max_{\mathbb{R}^2} f$$

e pertanto tali valori sono anche massimo e minimo assoluti.

3 Sia $R := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\right\}$ Calcolare

$$I = \iint_R (4xy^3 - x + 5)\, dxdy.$$

Soluzione. La regione R in coordinate polari viene descritta da

$$R = \{(\rho,\theta) : \quad 1 \le \rho \le \sqrt{2}\}$$

e quindi

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \rho(4\rho^5 \cos(\theta)\sin^3(\theta) - \rho\cos(\theta) + 5)\, d\theta d\rho.$$

Osserviamo ora che

$$\int_0^{2\pi} \cos(\theta)\sin^3(\theta) = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta}\sin^4(\theta) d\theta = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta = 0,$$

e quindi

$$I = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} 5\rho d\rho = 2\pi\, \frac{5}{2}\, \rho^2\Big|_1^{\sqrt{2}} = 5\pi.$$