Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 2

22 Luglio 2022

1.a Studiare la continuità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 2 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1.b Data $f(x,y,z) = \log(1+\mathrm{e}^{xyz})$ calcolare $\nabla f(2,0,-1)$.

2 Studiare la natura dei punti critici della funzione

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2.$$

3 Calcolare il volume della regione R posta sotto il piano $z = 3 - 2y$ e sopra il paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Traccia della soluzione

1.a Studiare la continuità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 2 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1.b Data $f(x,y,z) = \log(1+e^{xyz})$ calcolare $\nabla f(2,0,-1)$.

Soluzione. a) Osserviamo che per $(x,y) \neq (0,0)$ la funzione è rapporto di funzioni continue con denominatore non nullo, quindi f è continua. Calcolando poi il limite $(x,y) \to (0,0)$ tramite le coordinate polari si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} 1 - \rho^4 \cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = 1 \neq f(0,0) = 2,$$

quindi f non è continua in $(x,y) = (0,0)$.

b) Si tratta di una funzione definita per $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e composizione di funzioni derivabili con continuità. Pertanto risulta differenziabile e si ha

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{yze^{xyz}}{e^{xyz}+1}, \frac{xze^{xyz}}{e^{xyz}+1}, \frac{xye^{xyz}}{e^{xyz}+1} \right)$$

e pertanto sostituendo $\nabla f(2,0,-1) = (0,-1,0)$

2 Studiare la natura dei punti critici della funzione

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2.$$

Soluzione. La funzione risulta di classe C^1 e calcolando il gradiente si ha

$$\nabla f = \left(6x^2 - 6y, 6y - 6x\right).$$

I punti critici si trovano risolvendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$ da cui otteniamo come soluzioni $P_0 = (0,0)$ e $P_1 = (1,1)$. La matrice Hessiana risulta

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

La prima matrice ha due autovalori di segno opposto e quindi $P_0 = (0,0)$ è punto di sella, mentre la seconda ha due autovalori positivi e quindi la $P_1 = (1,1)$ è punto di minimo locale.

3 Calcolare il volume della regione R posta sotto il piano $z = 3-2y$ e sopra il paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Soluzione. Le due superfici si intersecano quando $3 - 2y = x^2 + y^2$ e quindi per

$$x^2 + (y+1)^2 = 4$$

che è una circonferenza di centro $P = (0,-1)$ e di raggio $R = 2$. Pertanto il volume è

$$\iint_D (3 - 2y - x^2 - y^2)\, dxdy$$

dove $D := \left\{(x,y) : x^2 + (y+1)^2 \leq 4\right\}$. Passando alle coordinate polari si ha

$$D = \{(\rho\cos(\theta), -1 + \rho\sin(\theta), \text{con } \theta \in [0, 2\pi[,\ \ \rho \in [0,2]\}$$

e l'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho(3 - 2(-1 + \rho\sin(\theta)) - \rho^2 cos^2(\theta) - (-1 + \sin(\theta))^2 \, d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - \rho^2)\rho = 2\pi \ \left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^2 \right) = 8\pi.$$