Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 2

16 Settembre 2022

1 Una funzione $u(x,y)$ regolare si dice "armonica" se $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Una funzione $v(x,y)$ si dice "bi-armonica" se Δv è armonica.

Verificare che $v(x,y) = x^4 - 3x^2y^2$ è bi-armonica

Soluzione. Osserviamo che dobbiamo calcolare

$$\Delta(\Delta v) = \Delta\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big) = \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4},$$

e controllare se si annulla.

Con calcoli espliciti abbiamo

$$\Delta v = (x^4 - 3x^2y^2)_{xx} + (x^4 - 3x^2y^2)_{yy} = 12x^2 - 6y^2 - 6x^2 = 6x^2 - 6y^2$$

e quindi

$$\Delta(\Delta v) = \Delta(6x^2 - 6y^2) = (6x^2 - 6y^2)_{xx} + (6x^2 - 6y^2)_{yy} = 12 - 12 = 0.$$

2 Data la funzione $f(x,y) = \sqrt{\frac{x}{y}}$ definita per $x \geq 0$ e $y > 0$ dire dove è differenziabile e calcolarne il differenziale.

Soluzione. Dato che $y > 0$ la funzione risulta composizione di funzioni di classe C^1, eccetto quando $x = 0$. Quindi è sicuramente differenziabile per $x > 0$ e $y > 0$.

Si ha $df(x,y) = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$ e quindi

$$df(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{xy}}dx - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}}dy \qquad \forall\, x > 0, y > 0,$$

3 Sia R la parte della corona circolare

$$0 < a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 \qquad 0 < a < b,$$

che si trova nel primo quadrante e sotto la retta $y = x$.

Calcolare

$$I = \iint_R \frac{y^2}{x^2}\, dxdy.$$

Sugg. Ricordare che $\frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + \tan^2(x)$.

Soluzione. La regione R in coordinate polari viene descritta da

$$R = \{(\rho, \theta) : \ 0 \leq \theta \leq \pi/4 \quad 0 < a \leq \rho \leq b\}$$

e quindi. cambiando variabili, si ha

$$\iint_R \frac{y^2}{x^2}\, dxdy = \int_0^{\pi/4} \int_a^b \rho \, \frac{\rho^2 \sin^2(\theta)}{\rho^2 \cos^2(\theta)}\, d\rho d\theta = \int_0^{\pi/4} \tan^2(\theta) d\theta \int_a^b \rho \, d\rho.$$

Si ha che $\int_a^b \rho \, d\rho = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, mentre

$$\int_0^{\pi/4} \tan^2(\theta) d\theta = \tan(\theta) - \theta\Big|_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Pertanto

$$\iint_R \frac{y^2}{x^2}\, dxdy = \frac{4-\pi}{8}(b^2 - a^2).$$