Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 2

14 febbraio 2023

1 Si consideri la funzione $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 6x$ e si trovino i punti di massimo e minimo (relativo e assoluto) sul seguente insieme:

$$\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Soluzione: La funzione è continua su di un insieme chiuso e limitato e quindi massimo e minimo assoluto esistono. In primo luogo, scriviamo il gradiente

$$\nabla f = (6x - 6, 4y)$$

che si annulla solo per $(1,0)$ che non è un punto interno, quindi non ci sono punti stazionari liberi.

Cerchiamo ora i punti sul vincolo. Invece di scrivere la Lagrangiana, osserviamo che la funzione ristretta al bordo del dominio risulta

$$f(x,y)_{|x^2+y^2=1} = x^2 - 6x + 2 = \phi(x)$$

e quindi andando a studiarla per $x \in [-1,1]$ abbiamo che la derivata prima vale $\phi'(x) = 2x-6$ che si annulla per $x = 3$ che non appartiene all'intervall. Vanno considerati ora i punti estremi cioè $x = \pm 1$. Abbiamo quindi i due punti

$$P_{1/2} = (\pm 1, 0)$$

Calcolando la funzione in questi punti si ha

$$f(1,0) = -3 \qquad f(-1,0) = 9$$

e quindi -3 è il minimo assoluto e 9 il massimo assoluto.

2 Dire se il campo vettoriale $\vec{F} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ è conservativo e in caso affermativo calcolarne il potenziale che si annulla per $(x,y,z) = (1,-1,2)$.

Soluzione. Calcolando il rotore si ha

$$\text{rot } \vec{F} = (\partial_z y - \partial_y z, \partial_x z - \partial_z x, \partial_x y - \partial_y z) = (0,0,0)$$

quindi in campo è irrotazionale e dato che il dominio è tutto lo spazio risulta anche conservativo.

Il potenziale associato a questo campo vettoriale può essere calcolato risolvendo l'equazione:

$$\vec{\nabla}\phi = \vec{F}$$

Da cui:

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi = x \quad \frac{\partial}{\partial y}\phi = y \quad \frac{\partial}{\partial z}\phi = z$$

Quindi possiamo ora risolvere l'equazione per ϕ: Dalla prima otteniamo che

$$\phi = \int x dx = \frac{x^2}{2} + g(y,z).$$

Usando la seconda equazione si ha $\partial_y \phi = \partial_y g(y,z) = y$, da cui segue che

$$g(y,z) = \frac{y^2}{2} + h(z).$$

Usando la terza otteniamo $\partial_z h(z) = z$, da cui

$$h(z) = \frac{z^2}{2} + C.$$

Pertantpo il potenziale associato al campo vettoriale $\vec{F} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ è quindi

$$\phi = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + C.$$

Imponendo che ϕ valga 0 per $(x,y,z) = (1,-1,2)$ otteniamo

$$\phi(1,-1,2) = \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{1}{2}(2)^2 + C = 3 + C$$

e quindi $C = -3$.

3 Calcolare l'integrale doppio della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ sulla regione del piano che è delimitata dalle curve $y = x^2$ e $y = -x^2 + 2$.

Soluzione:

Per calcolare l'integrale doppio la regione R può essere descritta come:

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \le x \le 1 \quad x^2 \le y \le -x^2 + 2\right\}.$$

Sostituendo queste limiti di integrazione nell'integrale doppio, otteniamo:

$$\iint_R x^2 + y^2 dxdy = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{-x^2+2} x^2 + y^2 dydx$$

Da cui

$$\begin{aligned}
\iint_R x^2 + y^2 dxdy &= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{3}y^3 + x^2 y\right]_{x^2}^{-x^2+2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} -\frac{2}{3}\left(x^6 + 3x^2 - 4\right) \\
&= -\frac{2}{3}\left(\frac{x^7}{7} + x^3 - 4x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{80}{21}.
\end{aligned}$$