Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 2

10 Giugno 2022

1. Studiare la funzione
$$f(x) = (x + y)\, \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)},$$
soggetta al vincolo $g(x, y) = 2x + y \geq 0$.

2. Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare il seguente integrale
$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{\sqrt{y}}{x^2 + y^2}\, dydx$$

3. Sia Σ la superficie (illimitata) Cartesiana
$$\Sigma = \left\{ x \geq 0, 0 \leq y \leq \mathrm{e}^{-x},\ \sigma(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 1\mathbf{k} \right\}$$
Calcolare, se possibile l'area della superficie di Σ

Traccia della soluzione

1. Studiare la funzione
$$f(x,y) = (x+y)\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)},$$
soggetta al vincolo $g(x,y) = 2x + y \geq 0$.

   Soluzione. Osserviamo intanto che
$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = 0$$
e che la funzione è continua su $G = \{(x,y) :\ g(x,y) \geq 0\}$. Calcolando il gradiente
$$\nabla f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(1 - 2x(x+y), 1 - 2y(x+y)),$$
che si annulla per $(x,y) = \pm(1/2, 1/2)$ e di questi punti solo $(1/2, 1/2)$ è interno a G. Abbiamo inoltre
$$Hf(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} 2x(2x(x+y)-3) - 2y & 2(x+y)(2xy-1) \\ 2(x+y)(2xy-1) & x\left(4y^2-2\right) + 4y^3 - 6y \end{pmatrix}.$$
e quindi
$$Hf(1/2,1/2) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{\mathrm{e}}} & -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \\ -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} & -\frac{3}{\sqrt{\mathrm{e}}} \end{pmatrix},$$
che ha due autovalori negativi (come si vede calcolando traccia e determinante) e quindi $(1/2,1/2)$ è punto di massimo locale e $f(1/2,1/2) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

   Studiamo ora la funzione sulla frontiera di G, quindi per $y = -2x$ e si ha
$$f(x,-2x) = \phi(x) = -x\mathrm{e}^{-5x^2}$$
che tende a zero per $x \to \pm\infty$ e la cui derivata $\phi'(x) = 10e^{-5x^2}x^2 - e^{-5x^2}$ si annulla per $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ (punto di minimo assoluto) e $x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$ (punto di massimo assoluto). Questo si vede osservando che la funzione è dispari. Dato che $f(x_1,-2x_1) = \phi(x_1) = \frac{1}{\sqrt{10\,\mathrm{e}}}$ e $f(x_2,-2x_2) = \phi(x_2) = -\frac{1}{\sqrt{10\,\mathrm{e}}}$, il minimo assoluto risulta $-\frac{1}{\sqrt{10\,\mathrm{e}}}$, mentre il massimo assoluto risulta $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

2. Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare il seguente integrale
$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{\sqrt{y}}{x^2+y^2}\,dydx$$

   Soluzione. Il dominio di integrazione è
$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\right\}.$$
La funzione è continua, non negativa e illimitata in un intorno dell'origine come si vede calcolando il limite per $(x,y) \to (0,0)$ lungo le rette $y = \lambda x$ con $\lambda > 1$.

   Il dominio di integrazione può essere riscritto come
$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\right\}.$$
Pertanto, se esiste,
$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{\sqrt{y}}{x^2+y^2}\,dydx = \int_0^1 \int_0^y \frac{\sqrt{y}}{x^2+y^2}\,dxdy.$$

Ora, per il primo integrale risulta essere $\int \frac{\sqrt{y}}{x^2+y^2}\,dx = \frac{1}{y}\arctan(x/y) + c$ e quindi

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{y}}{x^2+y^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{y}}\arctan(1) = \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Pertanto

$$\int_0^1 \int_0^y \frac{\sqrt{y}}{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^1 \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{y}}dy = \frac{\pi}{2}.$$

I calcoli possono essere giustificati considerado per esempio integrazione sul dominiio C ad esclusione di una "fetta" verticale di largezza ϵ e poi mandando a zero ϵ.

3. Sia Σ la superficie (illimitata) Cartesiana

$$\Sigma = \left\{x \geq 0, 0 \leq y \leq \mathrm{e}^{-x},\ \sigma(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\right\}$$

Calcolare, se possibile, l'area della superficie di Σ.

Soluzione. Si tratta di una superficie cartesiana illimitata, il cui elemento di area vale, essendo $f(x,y) = 1$,

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dxdy = dxdy.$$

Possiamo pertanto calcolare l'area della superficie

$$A(\Sigma) = \int_{\{0\leq x<\infty, 0\leq y\leq \mathrm{e}^{-x}\}} 1dxdy = \lim_{M\to+\infty}\int_{\{0\leq x\leq M, 0\leq y\leq \mathrm{e}^{-x}\}} 1dxdy$$

$$= \lim_{M\to+\infty}\int_0^M dx \int_0^{\mathrm{e}^{-x}} dy = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M \mathrm{e}^{-x}dx = \lim_{M\to+\infty} -\mathrm{e}^{-M} + 1 = 1.$$