Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 2

10 gennaio 2023

1 Determinare se la funzione

$$f(x,y)) = 2x^2 + 3y^2 \qquad \text{su } D := \{(x,y) : \; x^2 + y^2 \le 1\}$$

ha massimo e minimo assoluto ed eventualmente calcolarli.

Soluzione. La funzione è continua e D è chiuso e limitato, quindi massimo e minimo esistono. La funzione f è non-negativa e $f(0,0) = 0$, quindi $x_0 = (0,0)$ è punto di minimo e quello è anche unico punto stazionario dato che $\nabla f = (4x, 6y)$. Cercando i massimi e minimi sul bordo si ha che per $x^2 + y^2 = 1$

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 = 2x^2 + 2y^2 + y^2 = 2 + y^2 \qquad \text{per } x^2 + y^2 = 1$$

e la funzione ha quindi sul bordo minimo per $y = 0$ e massimo per $y = \pm 1$. Pertanto controllando i valori si ha che per $(0, \pm 1)$ la funzione vale 3 che è il massimo.

2 Calcolare

$$\iint_T xy \, dxdy,$$

dove T è il triangolo di vertici $A = (0,0)$, $B = (1,1)$, e $C = (0,1)$.

Soluzione. Il dominio A si scrive come dominio normale per esempio come

$$A = \{0 < y < 1 \quad \text{e} \quad 0 < x < y\}.$$

e quindi l'integrale diventa

$$\int_0^1 \int_0^y xydxdy = \int_0^1 ydy \int_0^y xdx = \int_0^1 y\frac{y^2}{2}dy = \frac{y^4}{8}\bigg|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

3 Determinare per quali $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale

$$f(x,y,z) = (\alpha xy^2, \beta x^2 y, \gamma z x^2)$$

è a divergenza nulla.

Soluzione. La divergenza risulta

$$\nabla \cdot f = \alpha y^2 + \beta x^2 + \gamma x^2 = \alpha y^2 + (\beta + \gamma) x^2$$

e quindi $\nabla \cdot f = 0$ per ogni (x,y,z) se e solo se $\alpha = 0$ e $\beta = -\gamma$.