Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 2

1 Luglio 2022

1.a Determinare il dominio massimale di $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2-y^2}$. Studiare il limite $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$. Studiare poi al variare di $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y) \qquad \text{e} \qquad \lim_{(x,y)\to(a,-a)} f(x,y).$$

1.b Quale piano orizzontale è tangente alla superficie cartesiana

$$z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$$

e quale è il punto di tangenza?

2 Sia $B(0,a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Calcolare

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{\int_{B(0,a)} |x| \, dxdy}{a^3}.$$

3 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = (xy - \sin(z))\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{\mathrm{e}^y}{z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\mathrm{e}^y}{z^2} - x\cos(z)\right)\mathbf{k}$$

definito per $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\}$. Determinare se è irrotazionale e se è conservativo.

Traccia della soluzione

1.a Determinare il dominio massimale di $f(x,y)=\frac{x-y}{x^2-y^2}$. Studiare il limite $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$. Studiare poi al variare di $a\in\mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y) \qquad \text{e} \qquad \lim_{(x,y)\to(a,-a)} f(x,y).$$

1.b Quale piano orizzontale è tangente alla superficie cartesiana

$$z = x^2-4xy-2y^2+12x-12y-1$$

e quale è il punto di tangenza?

Soluzione. a) La funzione è definita per $y\neq\pm x$. Nei punti dove è definita si ha

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x^2-y^2}=\frac{x-y}{(x-y)(x+y)}=\frac{1}{x+y},$$

e quindi $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{1}{x+y}=2$. In generale per $a\neq 0$ si ha quindi

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,a)}\frac{1}{a+a}=\frac{1}{2a},$$

mentre $\lim_{(x,y)\to(a,-a)} f(x,y)=N.E.$ dato che il denominatore si annulla, ma senza un segno definito.

b) La funzione $f(x,y)=x^2-4xy-2y^2+12x-12y-1$ è derivabile con continuità infinite volte e quindi è differenziabile. Il piano tangente in (x_0,y_0) è orizzontale se le derivate parziali si annullano, quindi risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-4y+12 & =0\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-4x-4y-12 & =0\end{cases}$$

si trova che ha come unica soluzione $(x_0,y_0)=(-4,1)$. Calcolando $f(-4,1)=-31$ si ottiene che il punto di tangenza è $P=(-4,1,-31)$ e il piano tangente è $z=-31$.

2 Sia $B(0,a)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq a^2\}$. Calcolare

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{\int_{B(0,a)}|x|\,dxdy}{a^3}.$$

Soluzione. Per calcolare l'integrale passiamo alle coordinate polari ottenendo

$$\int_{B(0,a)}|x|\,dxdy=\int_0^a\int_0^{2\pi}\rho|\rho\cos(\theta)|\,d\theta d\rho=\int_0^a\rho^2\int_0^{2\pi}|\cos(\theta)|\,d\theta d\rho,$$

dato che $\rho\geq 0$. Osserviamo che $\int_0^a\rho^2\,d\rho=\frac{a^3}{3}$, mentre

$$\int_0^{2\pi}|\cos(\theta)|\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)\,d\theta-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos(\theta)\,d\theta+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\cos(\theta)\,d\theta=-2\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos(\theta)\,d\theta,$$

e pertanto $\int_0^{2\pi}|\cos(\theta)|\,d\theta=4$, da cui si ricava che il limite da studiare risulta

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{\int_{B(0,a)}|x|\,dxdy}{a^3}=\lim_{a\to+\infty}\frac{4a^3}{3a^3}=\frac{4}{3}.$$

3 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = (xy - \sin(z))\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{\mathrm{e}^y}{z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\mathrm{e}^y}{z^2} - x\cos(z)\right)\mathbf{k}$$

definito per $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\}$. Determinare se è irrotazionale e se è conservativo.

Soluzione. Calcolando il rotore si ha

$$\mathbf{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0},$$

dato che

$$\partial_y F_1 = \partial_x F_2 = x, \qquad \partial_z F_1 = \partial_x F_3 = -\cos(z), \qquad \partial_z F_2 = \partial_y F_3 = \frac{\mathrm{e}^y}{z^2},$$

quindi il campo risulta irrotazione e potrebbe essere conservativo in tutti i domini che non intersecano il piano $z = 0$. Se esiste il potenziale ϕ deve verificare $\nabla\phi = \mathbf{F}$ e dalla prima equazione $\partial_x \phi = (xy - \sin(z))$ si ricava

$$\phi = \frac{1}{2}x^2 y - x\sin(z) + C_1(y, z).$$

Quindi la seconda equazione implica

$$\partial_y \phi = \frac{1}{2}x^2 + \partial_y C_1(y, z) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{\mathrm{e}^y}{z},$$

da cui si ottiene $\partial_y C_1(y, z) = -\frac{\mathrm{e}^y}{z}$ e quindi $C_1(y, z) = -\frac{\mathrm{e}^y}{z} + C_2(z)$.

Pertanto

$$\phi = \frac{1}{2}x^2 y - x\sin(z) - \frac{\mathrm{e}^y}{z} + C_2(z).$$

e dalla terza equazione

$$\partial_z \phi = -x\cos(z) + \frac{\mathrm{e}^y}{z^2} + C_2'(z) = \frac{\mathrm{e}^y}{z^2} - x\cos(z),$$

si ottiene $C_2'(z) = 0$ e quindi $C_2(z) = C$.

Per ogni $C \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\phi = \frac{1}{2}x^2 y - x\sin(z) - \frac{\mathrm{e}^y}{z} + C,$$

è una funzione potenziale di $\mathbf{F}$ per $z \neq 0$. Osserviamo però che è possibile avere potenziali ϕ anche scegliendo la costante C diversa nelle due regioni $\{z > 0\}$ e $\{z < 0\}$.