

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 febbraio 2020

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=443620

PARTE A

1. La funzione $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(x^2)$ è
A: strettamente positiva B: derivabile C: iniettiva D: negativa E: N.A.
2. Data $f(x) = 2^{|x|^2}$. Allora $f'(0)$ è uguale a
A: N.E. B: $\pi/2$ C: N.A. D: $\log(2)$ E: 0
3. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = \frac{2 + \log(x)}{|2 + \log(x)|}, \quad 0 < x \neq 1/e^2 \right\}$$

valgono

- A: $\{-1, -1, 1, 1\}$ B: $\{-1, -1, +\infty, N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: N.A. E: $\{0, N.E., 1/e^2, N.E.\}$
4. Una soluzione dell'equazione $y'(t) = t \cos(t)$ è
A: $-t \cos(t) + \sin(t) + \frac{\sqrt{\pi}}{9!e}$ B: N.E. C: N.A. D: $(t^2 + \pi)/2 + \cos(t)$ E: $t \sin(t) + \cos(t) + \frac{\sqrt{\pi}}{5!e}$
 5. Lo sviluppo di Taylor di $\sin(x + x^3)$ in $x_0 = 0$ al terz'ordine è
A: $x + O(x^4)$ B: $x + 5x^3/6 + o(x^3)$ C: $x + x^3 + o(x^3)$ D: $x + x^2/2! - x^3/3! + o(x^3)$ E: N.A.

6. L'integrale

$$\int_0^\pi x \cos(x) dx$$

vale

- A: $\sqrt{2}$ B: 0 C: -2 D: π E: N.A.
7. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=[e]+1}^{+\infty} \frac{n + 2 - e^{\cos(n)}}{2n^2} x^n$$

è

- A: e B: 1 C: N.A. D: 2 E: 1/e
8. La retta tangente al grafico di $y(x) = e^{\sin(x)}$ nel punto $x_0 = \pi/2$ vale $\phi(x) =$
A: $1 + x$ B: $2e$ C: $e + (x - \pi/2)$ D: $\frac{1}{e} - x$ E: N.A.
 9. L'insieme definito da $\{x \in \mathbb{R}, x > |2i - 2|\}$ è
A: vuoto B: N.A. C: $|x|^2 > 8$ D: $2\sqrt{2} < x$ E: $|x| > 0$
 10. Se esiste, il massimo di $f(x) = |\cos(x) - 1|$ sull'insieme $A = [-\pi, \pi/2]$ vale
A: 0 B: N.A. C: 1 D: 2 E: N.E.

CODICE=443620

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 febbraio 2020

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=539696

PARTE A

1. L'integrale

$$\int_0^{\pi} x \cos(x) dx$$

vale

A: π B: 0 C: $\sqrt{2}$ D: -2 E: N.A.

2. Lo sviluppo di Taylor di $\sin(x + x^3)$ in $x_0 = 0$ al terz'ordine è

A: $x + 5x^3/6 + o(x^3)$ B: $x + O(x^4)$ C: $x + x^2/2! - x^3/3! + o(x^3)$ D: N.A. E: $x + x^3 + o(x^3)$

3. Se esiste, il massimo di $f(x) = |\cos(x) - 1|$ sull'insieme $A = [-\pi, \pi/2]$ vale

A: 1 B: 2 C: 0 D: N.A. E: N.E.

4. Data $f(x) = 2^{|x|^2}$. Allora $f'(0)$ è uguale a

A: $\log(2)$ B: 0 C: N.E. D: $\pi/2$ E: N.A.

5. La retta tangente al grafico di $y(x) = e^{\sin(x)}$ nel punto $x_0 = \pi/2$ vale $\phi(x) =$

A: N.A. B: $1 + x$ C: $e + (x - \pi/2)$ D: $\frac{1}{e} - x$ E: $2e$

6. L'insieme definito da $\{x \in \mathbb{R}, x > |2i - 2|\}$ è

A: $|x| > 0$ B: vuoto C: N.A. D: $|x|^2 > 8$ E: $2\sqrt{2} < x$

7. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=[e]+1}^{+\infty} \frac{n + 2 - e^{\cos(n)}}{2n^2} x^n$$

è

A: 2 B: 1 C: $1/e$ D: e E: N.A.

8. Una soluzione dell'equazione $y'(t) = t \cos(t)$ è

A: $(t^2 + \pi)/2 + \cos(t)$ B: $-t \cos(t) + \sin(t) + \frac{\sqrt{\pi}}{9e}$ C: N.A. D: $t \sin(t) + \cos(t) + \frac{\sqrt{\pi}}{51e}$ E: N.E.

9. La funzione $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(x^2)$ è

A: iniettiva B: negativa C: strettamente positiva D: N.A. E: derivabile

10. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = \frac{2 + \log(x)}{|2 + \log(x)|}, 0 < x \neq 1/e^2 \right\}$$

valgono

A: $\{-1, -1, 1, 1\}$ B: N.A. C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{-1, -1, +\infty, N.E.\}$ E: $\{0, N.E., 1/e^2, N.E.\}$

CODICE=539696

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 febbraio 2020

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=105908

PARTE A

1. L'integrale

$$\int_0^{\pi} x \cos(x) dx$$

vale

A: $\sqrt{2}$ B: -2 C: π D: 0 E: N.A.

2. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=[e]+1}^{+\infty} \frac{n+2 - e^{\cos(n)}}{2n^2} x^n$$

è

A: 1 B: 2 C: N.A. D: $1/e$ E: e

3. La retta tangente al grafico di $y(x) = e^{\sin(x)}$ nel punto $x_0 = \pi/2$ vale $\phi(x) =$

A: $1+x$ B: N.A. C: $2e$ D: $\frac{1}{e} - x$ E: $e + (x - \pi/2)$

4. Se esiste, il massimo di $f(x) = |\cos(x) - 1|$ sull'insieme $A = [-\pi, \pi/2]$ vale

A: 1 B: 0 C: N.A. D: N.E. E: 2

5. L'insieme definito da $\{x \in \mathbb{R}, x > |2i - 2|\}$ è

A: $|x|^2 > 8$ B: N.A. C: $2\sqrt{2} < x$ D: $|x| > 0$ E: vuoto

6. Lo sviluppo di Taylor di $\sin(x+x^3)$ in $x_0 = 0$ al terz'ordine è

A: N.A. B: $x + 5x^3/6 + o(x^3)$ C: $x + x^3 + o(x^3)$ D: $x + x^2/2! - x^3/3! + o(x^3)$ E: $x + O(x^4)$

7. Una soluzione dell'equazione $y'(t) = t \cos(t)$ è

A: N.E. B: N.A. C: $-t \cos(t) + \sin(t) + \frac{\sqrt{\pi}}{9!e}$ D: $t \sin(t) + \cos(t) + \frac{\sqrt{\pi}}{5!e}$ E: $(t^2 + \pi)/2 + \cos(t)$

8. Data $f(x) = 2^{|x|^2}$. Allora $f'(0)$ è uguale a

A: N.A. B: $\log(2)$ C: N.E. D: 0 E: $\pi/2$

9. La funzione $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(x^2)$ è

A: negativa B: N.A. C: iniettiva D: derivabile E: strettamente positiva

10. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = \frac{2 + \log(x)}{|2 + \log(x)|}, 0 < x \neq 1/e^2 \right\}$$

valgono

A: N.A. B: $\{0, N.E., 1/e^2, N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{-1, -1, +\infty, N.E.\}$
E: $\{-1, -1, 1, 1\}$

CODICE=105908

CODICE=443620

CODICE=539696

CODICE=105908

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 febbraio 2020

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=564440

PARTE A

1. Se esiste, il massimo di $f(x) = |\cos(x) + 1|$ sull'insieme $A = [-\pi, \pi/2]$ vale

A: N.A. B: 1 C: 0 D: 2 E: N.E.

2. Una soluzione dell'equazione $y'(t) = t \sin(t)$ è

A: N.A. B: $t^3/2 - \cos(t)$ C: N.E. D: $t \sin(t) + \cos(t) + \frac{\sqrt{\pi}}{5!e}$ E: $-t \cos(t) + \sin(t) + \frac{\sqrt{\pi}}{9!e}$

3. Data $f(x) = 3^{|x|^2}$. Allora $f'(0)$ è uguale a

A: $\pi/2$ B: $\log(3)$ C: 0 D: N.A. E: N.E.

4. La retta tangente al grafico di $y(x) = e^{\sin(x)}$ nel punto $x_0 = \pi/2$ vale $\phi(x) =$

A: $\frac{1}{e} - x$ B: $1 + x$ C: $e + (x - \pi/2)$ D: $e/2$ E: N.A.

5. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = \frac{1 + \log(x)}{|1 + \log(x)|}, 0 < x \neq 1/e \right\}$$

valgono

A: $\{-1, -1, 1, 1\}$ B: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ C: N.A. D: $\{-1, -1, +\infty, N.E.\}$ E: $\{0, N.E., 1/e, N.E.\}$

6. L'integrale

$$\int_0^\pi x \sin(x) dx$$

vale

A: π B: $\sqrt{2}$ C: N.A. D: $\pi/2$ E: -2

7. Lo sviluppo di Taylor di $\sin(x + x^3)$ in $x_0 = 0$ al terz'ordine è

A: $x + x^3 + o(x^3)$ B: $x + 5x^3/6 + o(x^3)$ C: $x + O(x^4)$ D: N.A. E: $x + x^2/2! - x^3/3! + o(x^3)$

8. L'insieme definito da $\{x \in \mathbb{R}, x > |2i + 2|\}$ è

A: N.A. B: vuoto C: $|x| > 0$ D: $x \in]2\sqrt{2}, \infty[$ E: $|x|^2 > 8$

9. La funzione $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \cos(x^2)$ è

A: negativa B: strettamente positiva C: iniettiva D: non derivabile in $\sqrt{\pi}$ E: N.A.

10. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=[e]+1}^{+\infty} \frac{2n^2 + 2 - e^{\cos(n)}}{n} x^n$$

è

A: $1/e$ B: 2 C: e D: N.A. E: 1

CODICE=564440

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 febbraio 2020

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=753396

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = \frac{1 + \log(x)}{|1 + \log(x)|}, \quad 0 < x \neq 1/e \right\}$$

valgono

A: N.A. B: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ C: $\{-1, -1, 1, 1\}$ D: $\{-1, -1, +\infty, N.E.\}$ E: $\{0, N.E., 1/e, N.E.\}$

2. La funzione $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \cos(x^2)$ è

A: N.A. B: negativa C: iniettiva D: strettamente positiva E: non derivabile in $\sqrt{\pi}$

3. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=[e]+1}^{+\infty} \frac{2n^2 + 2 - e^{\cos(n)}}{n} x^n$$

è

A: N.A. B: $1/e$ C: 2 D: 1 E: e

4. La retta tangente al grafico di $y(x) = e^{\sin(x)}$ nel punto $x_0 = \pi/2$ vale $\phi(x) =$

A: $\frac{1}{e} - x$ B: N.A. C: $e + (x - \pi/2)$ D: $1 + x$ E: $e/2$

5. Una soluzione dell'equazione $y'(t) = t \sin(t)$ è

A: $-t \cos(t) + \sin(t) + \frac{\sqrt{\pi}}{91e}$ B: $t \sin(t) + \cos(t) + \frac{\sqrt{\pi}}{51e}$ C: $t^3/2 - \cos(t)$ D: N.A. E: N.E.

6. Lo sviluppo di Taylor di $\sin(x + x^3)$ in $x_0 = 0$ al terz'ordine è

A: $x + 5x^3/6 + o(x^3)$ B: N.A. C: $x + O(x^4)$ D: $x + x^2/2! - x^3/3! + o(x^3)$ E: $x + x^3 + o(x^3)$

7. L'insieme definito da $\{x \in \mathbb{R}, x > |2i + 2|\}$ è

A: vuoto B: $|x|^2 > 8$ C: N.A. D: $|x| > 0$ E: $x \in]2\sqrt{2}, \infty[$

8. Data $f(x) = 3^{|x|^2}$. Allora $f'(0)$ è uguale a

A: $\log(3)$ B: $\pi/2$ C: N.E. D: 0 E: N.A.

9. L'integrale

$$\int_0^{\pi} x \sin(x) dx$$

vale

A: N.A. B: $\pi/2$ C: π D: $\sqrt{2}$ E: -2

10. Se esiste, il massimo di $f(x) = |\cos(x) + 1|$ sull'insieme $A = [-\pi, \pi/2]$ vale

A: 0 B: N.E. C: 1 D: 2 E: N.A.

CODICE=753396

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 febbraio 2020

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=459366

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{ y = \frac{1 + \log(x)}{|1 + \log(x)|}, \quad 0 < x \neq 1/e \right\}$$

valgono

A: $\{0, N.E., 1/e, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{-1, -1, 1, 1\}$ D: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ E: $\{-1, -1, +\infty, N.E.\}$

2. Una soluzione dell'equazione $y'(t) = t \sin(t)$ è

A: $t \sin(t) + \cos(t) + \frac{\sqrt{\pi}}{51e}$ B: $-t \cos(t) + \sin(t) + \frac{\sqrt{\pi}}{91e}$ C: N.A. D: N.E. E: $t^3/2 - \cos(t)$

3. La funzione $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \cos(x^2)$ è

A: non derivabile in $\sqrt{\pi}$ B: iniettiva C: N.A. D: strettamente positiva E: negativa

4. Lo sviluppo di Taylor di $\sin(x + x^3)$ in $x_0 = 0$ al terz'ordine è

A: $x + x^3 + o(x^3)$ B: $x + x^2/2! - x^3/3! + o(x^3)$ C: N.A. D: $x + O(x^4)$ E: $x + 5x^3/6 + o(x^3)$

5. Data $f(x) = 3^{|x|^2}$. Allora $f'(0)$ è uguale a

A: $\pi/2$ B: N.A. C: 0 D: N.E. E: $\log(3)$

6. L'insieme definito da $\{x \in \mathbb{R}, x > |2i + 2|\}$ è

A: $|x|^2 > 8$ B: vuoto C: N.A. D: $|x| > 0$ E: $x \in]2\sqrt{2}, \infty[$

7. Se esiste, il massimo di $f(x) = |\cos(x) + 1|$ sull'insieme $A = [-\pi, \pi/2]$ vale

A: 0 B: N.E. C: N.A. D: 2 E: 1

8. La retta tangente al grafico di $y(x) = e^{\sin(x)}$ nel punto $x_0 = \pi/2$ vale $\phi(x) =$

A: $e + (x - \pi/2)$ B: $e/2$ C: $1 + x$ D: $\frac{1}{e} - x$ E: N.A.

9. L'integrale

$$\int_0^\pi x \sin(x) dx$$

vale

A: π B: $\pi/2$ C: $\sqrt{2}$ D: N.A. E: -2

10. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=[e]+1}^{+\infty} \frac{2n^2 + 2 - e^{\cos(n)}}{n} x^n$$

è

A: $1/e$ B: N.A. C: e D: 1 E: 2

CODICE=459366

CODICE=564440

CODICE=753396

CODICE=459366

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 febbraio 2020

PARTE B

1. Studiare la funzione

$$f(x) = |x^3 + x^2 + x + 1| - x^2 \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione. Per trattare il valore assoluto osserviamo che la funzione $x^3 + x^2 + x + 1$ si annulla per $x = -1$ e si può fattorizzare come segue $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$ pertanto è positiva per $x > -1$. Si ha quindi

$$f(x) = |x^3 + x^2 + x + 1| - x^2 = |(x+1)(x^2+1)| - x^2 = \begin{cases} x^3 + x^2 + x + 1 - x^2 & \text{se } x \geq -1 \\ -x^3 - x^2 - x - 1 - x^2 & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

La funzione f risulta continua su tutto \mathbb{R} essendo composizione di funzioni continue e si ha anche

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Studiandola intanto per $x \geq -1$ si ha che in questo caso $f(x) = x^3 + x + 1$ e quindi

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 \quad \text{per } x > -1$$

e quindi la funzione risulta strettamente crescente per $x > -1$. Inoltre $f''(x) = 6x$, per $x > -1$ e quindi risulta convessa per $x \geq 0$ e concava per $-1 < x \leq 0$.

Per $x < -1$ si ha invece si ha $f(x) = -x^3 - 2x^2 - x - 1$ e quindi

$$f'(x) = -3x^2 - 4x - 1 \quad x < -1.$$

La funzione $-3x^2 - 4x - 1$ si annulla per $x = -1$ e per $x = -1/3$, e risulta sempre negativa per $x < -1$. Quindi la funzione f risulta strettamente decrescente per $x < -1$. Inoltre $f''(x) = -6x - 4 > 0$ per $x < -1$, quindi f è convessa per $x < -1$.

Nel punto $x = -1$ la funzione risulta non derivabile, dato che $f'_-(-1) = 0 \neq 1 = f'_+(-1)$. Nel punto $x = -1$ si ha minimo assoluto senza che la funzione sia derivabile.

2. Risolvere, al variare del parametro $\omega \in \mathbb{R}^+$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 9y(x) = \cos(\omega x), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

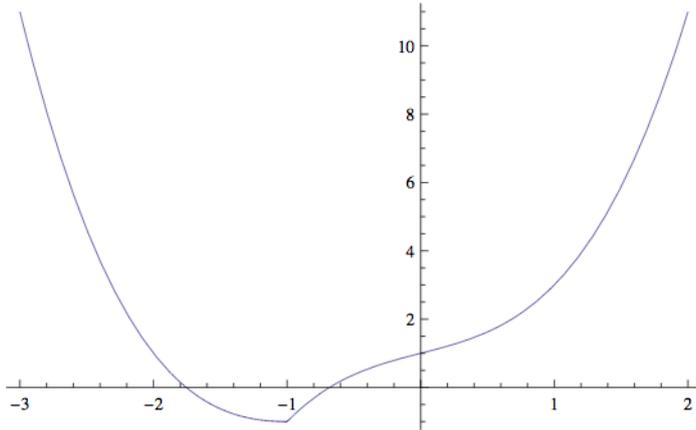


Figura 1: Grafico di $f(x) = |x^3 + x^2 + x + 1| - x^2$.

e eventualmente studiare il limite $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} y(x)$.

Soluzione. L'equazione omogenea associata $Y''(x) + 9Y(x) = 0$ ha come equazione caratteristica $\lambda^2 + 9 = 0$ e quindi ha le soluzioni $\lambda = \pm 3i$. Si ha pertanto risonanza soltanto se $\omega = 3$. La soluzione particolare va cercata quindi della forma

$$y_f(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) \quad \text{se } \omega \neq 3,$$

$$y_f(x) = Ax \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) \quad \text{se } \omega = 3,$$

e sostituendo si trova

$$y_f(x) = \frac{1}{9 - \omega^2} \cos(\omega x) \quad \text{se } \omega \neq 3,$$

$$y_f(x) = \frac{x}{6} \sin(\omega x) \quad \text{se } \omega = 3,$$

e quindi l'integrale generale risulta

$$y(x) = A \cos(3x) + B \sin(3x) + \frac{1}{9 - \omega^2} \cos(\omega x) \quad \text{se } \omega \neq 3,$$

$$y(x) = A \cos(3x) + B \sin(3x) + \frac{x}{6} \sin(3x) \quad \text{se } \omega = 3.$$

Imponendo i dati iniziali si trova pertanto

$$y(x) = \frac{\omega^2 - 8}{\omega^2 - 9} \cos(3x) + \frac{1}{9 - \omega^2} \cos(\omega x) \quad \text{se } \omega \neq 3$$

$$y(x) = \cos(3x) + \frac{x}{6} \sin(3x) \quad \text{se } \omega = 3.$$

Andando a considerare la soluzione trovata per $\omega > 3$, si ha che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{\omega^2 - 8}{\omega^2 - 9} \cos(3x) = \cos(3x)$$

mentre

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{9 - \omega^2} \cos(\omega x) = 0$$

e quindi

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} y(x) = \cos(3x).$$

3. Studiare la convergenza e eventualmente calcolare

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx.$$

Soluzione. La funzione integranda è non-negativa e il denominatore si annulla solo per $x = 0$. Abbiamo quindi da studiare sia il comportamento a zero che quello all'infinito. Osserviamo che per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$x^2 = o(\sqrt{x}),$$

quindi

$$\frac{1}{\sqrt{x} + x^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Inoltre per $x \rightarrow \infty$ il termine x^2 è infinito di ordine maggiore rispetto a \sqrt{x} e dunque

$$\frac{1}{\sqrt{x} + x^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Quindi si col teorema del confronto asintotico si ha che

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx \quad \text{si comporta come } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{che converge}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx \quad \text{si comporta come } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad \text{che converge.}$$

quindi l'integrale risulta convergente.

Per calcolare esplicitamente l'integrale scriviamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + x^{3/2})} dx$$

e con il cambio di variabile $t = \sqrt{x}$ si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx = \int \frac{2}{1 + t^3} dt \Big|_{t=\sqrt{x}}.$$

L'integrale si calcola con scomponendo il denominatore osservando che si annulla per $t = -1$ e per le altre due radici terze complesse dell'unità (complesse e coniugate), nel seguente modo

$$\frac{1}{1 + t^3} = \frac{A}{1 + t} + \frac{B + Ct}{1 - t + t^2}.$$

Calcolando le costanti si ha pertanto

$$\frac{1}{1 + t^3} = \frac{1}{3(t + 1)} - \frac{2/3 - t/3}{(t^2 - t + 1)}$$

e quindi

$$\int \frac{dt}{1 + t^3} = -\frac{1}{6} \log(t^2 - t + 1) + \frac{1}{3} \log(t + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t - 1}{\sqrt{3}}\right).$$

Sostituendo si ottiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx = \int \frac{2}{1 + t^3} dt \Big|_{t=\sqrt{x}} = \frac{2}{3} \log(\sqrt{x} + 1) - \frac{1}{3} \log(x - \sqrt{x} + 1) + \frac{2 \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}.$$

Concludendo

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

4. Dimostrare che

$$\frac{\log(\log(6)) + \log(\log(10))}{2} \geq \log(\log(8))$$

Soluzione. La funzione $f(x) = \log(\log(x))$, che è definita per $x > 1$, risulta concava, dato che

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2 \log^2(x)} - \frac{1}{x^2 \log(x)} < 0 \quad \text{per } x > 1.$$

Pertanto dalla concavità segue che presi due punti arbitrari

$$A = (x_0, f(x_0)) \quad B = (x_1, f(x_1)) \quad 1 < x_0 < x_1$$

appartenenti al grafico, la funzione valutata in ogni punto $x_0 < x < x_1$ “sta sopra alla corda che li congiunge.” Considerando il punto medio $\frac{x_0+x_1}{2}$ questo implica

$$\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \geq f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right),$$

Applicando tale osservazione con $x_0 = 6$, $x_1 = 10$, e quindi $\frac{x_0+x_1}{2} = 8$ si ha la tesi.