Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=389058

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=389058

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^x + \log(1/\mathrm{e}) \leq 0\},$$
valgono
A: $\{-\infty, N.E., \mathrm{e}, \mathrm{e}\}$ B: $\{-\infty, N.E., 0, 0\}$ C: N.A. D: $\{-1, -1, 0, 0\}$ E: $\{-\infty, N.E., 0, N.E.\}$

2. L'integrale
$$\int_0^1 (1-x)^{1/\pi}\, dx$$
vale
A: $\log(\pi)$ B: $\frac{\pi}{1+\pi}$ C: 1 D: π E: N.A.

3. Il numero di intersezioni tra gli insiemi
$$A = \{z \in \mathbb{C} :\ z(\overline{z}+1) = 1\} \qquad \text{e} \qquad B = \{z \in \mathbb{C} :\ z(\overline{z}+i) = 1\}$$
A: 4 B: 1 C: 2 D: N.A. E: 3

4. L'integrale
$$\int_1^{1/\mathrm{e}} x\, \mathrm{e}^x\, dx$$
vale
A: e B: 0 C: $(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}-1}$ D: $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ E: N.A.

5. Il valore del limite
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1 - x\sin(x)}{1-\cos(x)}$$
A: $-\infty$ B: N.A. C: 0 D: 1 E: N.E.

6. La funzione $f :]0,2[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x\log(x)$
A: N.A. B: ha massimo C: è concava D: è tale che $f'(1) = 0$ E: convessa

7. Il limite
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2(n)}{\log_3(n^2)}$$
vale
A: N.A. B: N.E. C: $\frac{\log(3)}{\log(2)}$ D: $\frac{\log(2)}{2\log(3)}$ E: $\frac{\log(4)}{\log(3)}$

8. Il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{n^n + n^\pi}{(\pi n)^n}\Big)(x+\mathrm{e})^n$$
A: e^2 B: N.A. C: $-\mathrm{e}$ D: π^{-1} E: π

9. Sia $y(x)$ la soluzione del pb. di Cauchy $y'(x) = \frac{\cos(x)}{(y(x))^{20}}$ e $y(0) = 1$. Allora $\frac{y(0)}{y'(0)}$ vale
A: $1/\pi$ B: π C: $1/4$ D: 1 E: N.A.

10. Data $f(x) = (\log(x))^{\sqrt{x}}$, allora $f'(\mathrm{e})$ vale
A: N.A. B: e^{-1} C: $\sqrt{\mathrm{e}}$ D: e^2 E: 0

CODICE=389058

CODICE=389058

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=555969

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=555969

PARTE A

1. La funzione $f :]0,2[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x\log(x)$
A: ha massimo B: convessa C: è tale che $f'(1) = 0$ D: è concava E: N.A.

2. Il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{n^n + n^\pi}{(\pi n)^n}\Big)(x+\mathrm{e})^n$$
A: π B: N.A. C: e^2 D: $-\mathrm{e}$ E: π^{-1}

3. Il numero di intersezioni tra gli insiemi
$$A = \{z \in \mathbb{C} :\ z(\overline{z}+1) = 1\} \qquad \text{e} \qquad B = \{z \in \mathbb{C} :\ z(\overline{z}+i) = 1\}$$
A: 1 B: N.A. C: 2 D: 3 E: 4

4. L'integrale
$$\int_0^1 (1-x)^{1/\pi}\,dx$$
vale
A: π B: $\frac{\pi}{1+\pi}$ C: $\log(\pi)$ D: N.A. E: 1

5. Il limite
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_2(n)}{\log_3(n^2)}$$
vale
A: N.E. B: $\frac{\log(2)}{2\log(3)}$ C: $\frac{\log(3)}{\log(2)}$ D: N.A. E: $\frac{\log(4)}{\log(3)}$

6. Data $f(x) = (\log(x))^{\sqrt{x}}$, allora $f'(\mathrm{e})$ vale
A: 0 B: $\sqrt{\mathrm{e}}$ C: e^2 D: N.A. E: e^{-1}

7. L'integrale
$$\int_1^{1/\mathrm{e}} x\,\mathrm{e}^x\,dx$$
vale
A: N.A. B: $(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}-1}$ C: 0 D: e E: $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$

8. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^x + \log(1/\mathrm{e}) \le 0\},$$
valgono
A: N.A. B: $\{-\infty, N.E., 0, N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., 0, 0\}$ D: $\{-1,-1,0,0\}$ E: $\{-\infty, N.E., \mathrm{e}, \mathrm{e}\}$

9. Sia $y(x)$ la soluzione del pb. di Cauchy $y'(x) = \frac{\cos(x)}{(y(x))^{20}}$ e $y(0) = 1$. Allora $\frac{y(0)}{y'(0)}$ vale
A: N.A. B: 1/4 C: π D: $1/\pi$ E: 1

10. Il valore del limite
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1 - x\sin(x)}{1-\cos(x)}$$
A: N.E. B: $-\infty$ C: N.A. D: 0 E: 1

CODICE=555969

CODICE=555969

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=385321

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=385321

PARTE A

1. Il valore del limite
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1 - x\sin(x)}{1-\cos(x)}$$
A: 1 B: N.E. C: $-\infty$ D: 0 E: N.A.

2. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^x + \log(1/\mathrm{e}) \le 0\},$$
valgono
A: $\{-\infty, N.E., 0, 0\}$ B: N.A. C: $\{-\infty, N.E., \mathrm{e}, \mathrm{e}\}$ D: $\{-1, -1, 0, 0\}$ E: $\{-\infty, N.E., 0, N.E.\}$

3. Il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{n^n + n^\pi}{(\pi n)^n}\Big)(x+\mathrm{e})^n$$
A: π^{-1} B: N.A. C: $-\mathrm{e}$ D: π E: e^2

4. L'integrale
$$\int_0^1 (1-x)^{1/\pi}\, dx$$
vale
A: 1 B: N.A. C: π D: $\log(\pi)$ E: $\frac{\pi}{1+\pi}$

5. Sia $y(x)$ la soluzione del pb. di Cauchy $y'(x) = \frac{\cos(x)}{(y(x))^{20}}$ e $y(0) = 1$. Allora $\frac{y(0)}{y'(0)}$ vale
A: $1/4$ B: N.A. C: $1/\pi$ D: π E: 1

6. L'integrale
$$\int_1^{1/\mathrm{e}} x\,\mathrm{e}^x\, dx$$
vale
A: N.A. B: $(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}-1}$ C: e D: 0 E: $\big(\frac{1}{\mathrm{e}} - 1\big)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$

7. Il numero di intersezioni tra gli insiemi
$$A = \{z \in \mathbb{C} :\ z(\overline{z}+1) = 1\} \qquad \text{e} \qquad B = \{z \in \mathbb{C} :\ z(\overline{z}+i) = 1\}$$
A: N.A. B: 4 C: 1 D: 3 E: 2

8. Il limite
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2(n)}{\log_3(n^2)}$$
vale
A: $\frac{\log(2)}{2\log(3)}$ B: $\frac{\log(4)}{\log(3)}$ C: N.E. D: N.A. E: $\frac{\log(3)}{\log(2)}$

9. Data $f(x) = (\log(x))^{\sqrt{x}}$, allora $f'(\mathrm{e})$ vale
A: $\sqrt{\mathrm{e}}$ B: N.A. C: e^2 D: e^{-1} E: 0

10. La funzione $f :]0,2[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x\log(x)$
A: è concava B: ha massimo C: convessa D: N.A. E: è tale che $f'(1) = 0$

CODICE=385321

CODICE=385321

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	○	●	○
5	○	●	○	○	○
6	○	○	○	○	●
7	●	○	○	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	●	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=389058

CODICE=389058

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	●	○	○	○	○
3	○	●	○	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	○	●	○
7	○	○	○	○	●
8	○	○	●	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	○	●	○	○

CODICE=555969

CODICE=555969

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	●	○	○	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	●	○	○	○	○
8	○	○	○	●	○
9	○	●	○	○	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=385321

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=071819

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=071819

CODICE=071819

PARTE A

1. Data $f(x) = (\log(x))^{\sqrt{x}}$, allora $f'(\mathrm{e})$ vale
   A: $\mathrm{e}^{-1/2}$ B: $\sqrt{\mathrm{e}}$ C: e^{-1} D: N.A. E: 0
2. Il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{(\pi n)^n + n^\pi}{n^n}\Big)(x+\mathrm{e})^n$$
   A: N.A. B: $-\mathrm{e}$ C: e^2 D: π E: π^{-1}
3. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^x + \log(1/\mathrm{e}) \leq 0\},$$
   valgono
   A: $\{-\infty, N.E., \mathrm{e}, \mathrm{e}\}$ B: $\{-1,-1,0,0\}$ C: N.A. D: $\{-\infty, N.E., 0, N.E.\}$ E: $\{-\infty, N.E., 1, 1\}$
4. Sia $y(x)$ la soluzione del pb. di Cauchy $y'(x) = \frac{\cos(x)}{(y(x))^{20}}$ e $y(0) = 1$. Allora $\frac{y(0)}{y'(0)}$ vale
   A: 0 B: π C: N.A. D: $1/4$ E: $1/\pi$
5. Il limite
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_2(n)}{\log_3(n^2)}$$
   vale
   A: $\frac{\log(3)}{\log(4)}$ B: $\frac{\log(2)}{2\log(3)}$ C: $\frac{\log(4)}{\log(3)}$ D: N.A. E: N.E.
6. Il valore del limite
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1 - x\sin(x)}{1-\cos(x)}$$
   A: 0 B: N.E. C: $-\infty$ D: N.A. E: $+\infty$
7. Il numero di intersezioni tra gli insiemi
$$A = \{z \in \mathbb{C} :\ z(\overline{z}+1) = 1\} \qquad \text{e} \qquad B = \{z \in \mathbb{C} :\ z(\overline{z}+i) = 1\}$$
   A: 2 B: 4 C: 1 D: N.A. E: 0
8. La funzione $f :]0,2[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x\log(x)$
   A: ha minimo B: ha massimo C: è tale che $f'(1) = 0$ D: N.A. E: è concava
9. L'integrale
$$\int_0^1 (1-x)^\pi \, dx$$
   vale
   A: N.A. B: $\log(\pi)$ C: $\frac{1}{1+\pi}$ D: 1 E: π
10. L'integrale
$$\int_{1/\mathrm{e}}^1 x\,\mathrm{e}^x \, dx$$
   vale
   A: 0 B: e C: N.A. D: $\left(\frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ E: $(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$

CODICE=071819

CODICE=071819

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=394247

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

A	B	C	D	E

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=394247

PARTE A

1. Il numero di intersezioni tra gli insiemi
$$A = \{z \in \mathbb{C} : \ z(\overline{z} + 1) = 1\} \qquad \text{e} \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : \ z(\overline{z} + i) = 1\}$$
A: 0 B: N.A. C: 1 D: 4 E: 2

2. Il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{(\pi n)^n + n^\pi}{n^n} \Big) (x + \mathrm{e})^n$$
A: π B: $-\mathrm{e}$ C: N.A. D: e^2 E: π^{-1}

3. L'integrale
$$\int_{1/\mathrm{e}}^{1} x\, \mathrm{e}^x \, dx$$
vale
A: e B: N.A. C: 0 D: $(\mathrm{e} - 1)\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ E: $\left(\frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right) \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$

4. Il limite
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log_2(n)}{\log_3(n^2)}$$
vale
A: $\frac{\log(2)}{2 \log(3)}$ B: N.A. C: N.E. D: $\frac{\log(4)}{\log(3)}$ E: $\frac{\log(3)}{\log(4)}$

5. Data $f(x) = (\log(x))^{\sqrt{x}}$, allora $f'(\mathrm{e})$ vale
A: 0 B: $\mathrm{e}^{-1/2}$ C: N.A. D: $\sqrt{\mathrm{e}}$ E: e^{-1}

6. La funzione $f :]0, 2[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x \log(x)$
A: è concava B: ha massimo C: è tale che $f'(1) = 0$ D: ha minimo E: N.A.

7. Sia $y(x)$ la soluzione del pb. di Cauchy $y'(x) = \frac{\cos(x)}{(y(x))^{20}}$ e $y(0) = 1$. Allora $\frac{y(0)}{y'(0)}$ vale
A: N.A. B: π C: $1/\pi$ D: 0 E: $1/4$

8. L'integrale
$$\int_0^1 (1 - x)^\pi \, dx$$
vale
A: 1 B: π C: $\frac{1}{1+\pi}$ D: $\log(\pi)$ E: N.A.

9. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^x + \log(1/\mathrm{e}) \leq 0\},$$
valgono
A: $\{-1, -1, 0, 0\}$ B: $\{-\infty, N.E., 1, 1\}$ C: N.A. D: $\{-\infty, N.E., \mathrm{e}, \mathrm{e}\}$ E: $\{-\infty, N.E., 0, N.E.\}$

10. Il valore del limite
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1 - x \sin(x)}{1 - \cos(x)}$$
A: $-\infty$ B: N.E. C: N.A. D: $+\infty$ E: 0

CODICE=394247

CODICE=394247

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=954725

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=954725

PARTE A

1. Il limite
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2(n)}{\log_3(n^2)}$$
vale
A: $\frac{\log(3)}{\log(4)}$ B: N.A. C: $\frac{\log(4)}{\log(3)}$ D: $\frac{\log(2)}{2\log(3)}$ E: N.E.

2. Sia $y(x)$ la soluzione del pb. di Cauchy $y'(x) = \frac{\cos(x)}{(y(x))^{20}}$ e $y(0) = 1$. Allora $\frac{y(0)}{y'(0)}$ vale
A: $1/4$ B: $1/\pi$ C: N.A. D: π E: 0

3. Il valore del limite
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1 - x\sin(x)}{1 - \cos(x)}$$
A: N.E. B: 0 C: $-\infty$ D: $+\infty$ E: N.A.

4. L'integrale
$$\int_{1/\mathrm{e}}^{1} x\,\mathrm{e}^x\,dx$$
vale
A: $(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ B: 0 C: N.A. D: e E: $\left(\frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$

5. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^x + \log(1/\mathrm{e}) \leq 0\},$$
valgono
A: $\{-\infty, N.E., 0, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{-1, -1, 0, 0\}$ D: $\{-\infty, N.E., 1, 1\}$ E: $\{-\infty, N.E., \mathrm{e}, \mathrm{e}\}$

6. Data $f(x) = (\log(x))^{\sqrt{x}}$, allora $f'(\mathrm{e})$ vale
A: N.A. B: $\sqrt{\mathrm{e}}$ C: e^{-1} D: $\mathrm{e}^{-1/2}$ E: 0

7. L'integrale
$$\int_0^1 (1-x)^\pi\,dx$$
vale
A: 1 B: π C: $\log(\pi)$ D: $\frac{1}{1+\pi}$ E: N.A.

8. La funzione $f :]0, 2[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x\log(x)$
A: ha massimo B: è tale che $f'(1) = 0$ C: è concava D: N.A. E: ha minimo

9. Il numero di intersezioni tra gli insiemi
$$A = \{z \in \mathbb{C} : \ z(\overline{z} + 1) = 1\} \qquad \text{e} \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : \ z(\overline{z} + i) = 1\}$$
A: 0 B: 1 C: 2 D: 4 E: N.A.

10. Il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{(\pi n)^n + n^\pi}{n^n}\Big)(x + \mathrm{e})^n$$
A: N.A. B: π^{-1} C: $-\mathrm{e}$ D: π E: e^2

CODICE=954725

CODICE=954725

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	●	○	○
4	○	○	●	○	○
5	●	○	○	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	○	●
8	●	○	○	○	○
9	○	○	●	○	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=071819

CODICE=071819

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	●	○	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	●	○	○	○
6	○	○	○	●	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	●	○	○
9	○	○	●	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=394247

CODICE=394247

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	●	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	●	○	○
5	○	●	○	○	○
6	○	○	○	●	○
7	○	○	○	●	○
8	○	○	○	○	●
9	●	○	○	○	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=954725

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2020

PARTE B

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{1}{3}|x| + \log\left(2\frac{|x|-1}{|x|-2}\right).$$

Soluzione. Per determinare il dominio massimale della funzione è sufficiente che il logaritmo risulti ben definito, quindi risolvere la disequazione
$$\frac{|x|-1}{|x|-2} > 0.$$
Tale disequazione risulta soddisfatta per $x \in]-\infty,-2[\cup]-1,1[\cup]2,+\infty[$. Osserviamo poi che la funzione f è pari e la studieremo pertanto solo per $x \geq 0$. Consideriamo quindi
$$F(x) = \frac{1}{3}x + \log\left(2\,\frac{x-1}{x-2}\right) \qquad x \in [0,1[\cup]2,+\infty[$$
e, studiando comportamento agli estremi del dominio, osserviamo che
$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 2^+} F(x) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.$$
Inoltre la retta $\phi(x) = \frac{x}{3} + \log(2)$ risulta un asintoto obliquo.
Passando allo studio della derivata prima si ha
$$F'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1-3x+x^2}{3(x-1)(x-2)} \qquad \text{per } x \in]0,1[\cup]2,+\infty[.$$
Il numeratore risulta positivo per $x < \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ e per $x > \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ e osserviamo che $\frac{3-\sqrt{13}}{2} < 0$ non appartiene al dominio della F, mentre $\frac{3+\sqrt{13}}{2} > 2$. Il denominatore risulta sempre positivo (nel dominio della f intersecato con le $x > 0$) e quindi otteniamo che
$$F'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > \frac{3+\sqrt{13}}{2},$$
con $F'(x) = 0$ per $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ e $F'(x) < 0$ altrove. Si ha pertanto un punto di minimo relativo per $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Inoltre, dato che $F' < 0$ per $0 < x < 1$, in $x = 0$ c'è un massimo relativo. Inoltre $F'_+(0) = -1/6$.

Passando alla derivata seconda si ha

$$F''(x) = \frac{2x-3}{(x-2)^2(x-1)^2} \qquad \text{per } x \in]0,1[\cup]2,+\infty[,$$

e non ci sono punti di flesso nel dominio dato che $3/2 \notin \mathrm{Dom}(F)$. La funzione F risulta quindi concava per $0 < x < 1$ e convessa per $x > 2$.

Il grafico della f si ottiene riflettendo quello della F rispetto all'asse delle y e osserviamo che la funzione f risulta non derivabile in $x = 0$.

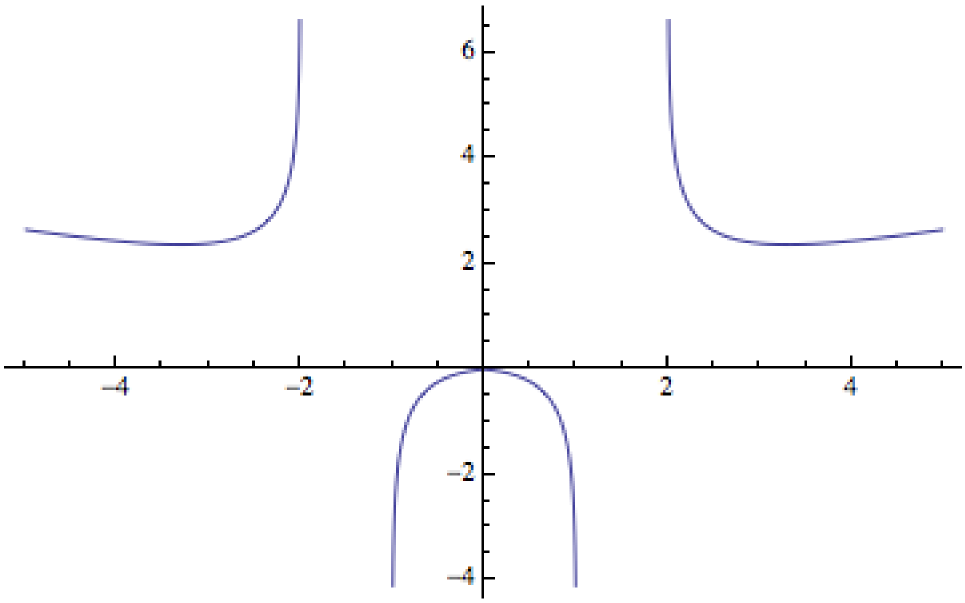

Figura 1: Grafico di $f(x) = \frac{1}{3}|x| + \log\left(2\frac{|x|-1}{|x|-2}\right)$.

2. Si risolva, per $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_\epsilon''(x) - \epsilon^2 y_\epsilon(x) = x \\ y_\epsilon(0) = \epsilon^2 \\ y_\epsilon'(0) = 0. \end{cases}$$

Si determini poi se esiste il limite $\lim_{\epsilon\to 0^+} y_\epsilon(x)$.

Soluzione. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - \epsilon^2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm\epsilon$ e pertanto le soluzioni dell'omogenea sono

$$Y_\epsilon(x) = c_1 e^{\epsilon x} + c_2 e^{-\epsilon x}.$$

Il problema è senza risonanza, dato che $\epsilon > 0$, e la soluzione particolare va cerca della forma $y_f(x) = ax + b$. Sostituendo si ottiene

$$y_f(x) = -\frac{x}{\epsilon^2},$$

Pertanto l'integrale generale risulta essere

$$y_\epsilon(x) = c_1 e^{\epsilon x} + c_2 e^{-\epsilon x} - \frac{x}{\epsilon^2}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha

$$\begin{cases} y_\epsilon(0) = c_1 + c_2 = \epsilon^2, \\ \\ y_\epsilon(0) = c_1\epsilon - c_2\epsilon - \dfrac{1}{\epsilon^2} = 0, \end{cases}$$

e risolvendo il sistema si ricava

$$y_\epsilon(x) = \frac{1}{2}(\epsilon^2 + \epsilon^{-3})e^{x\epsilon} + \frac{1}{2}(\epsilon^2 - \epsilon^{-3})e^{-x\epsilon} - \frac{x}{\epsilon^2}.$$

Il problema limite per $\epsilon \to 0$ risulta

$$\begin{cases} y''(x) = x \\ \\ y_\epsilon(0) = 0 \\ \\ y'_\epsilon(0) = 0. \end{cases}$$

che ha come soluzione $y(x) = x^3/6$. Vediamo, tramite sviluppo di Taylor, che per $x \neq 0$ fissato

$$\begin{aligned} y_\epsilon(x) &= \frac{\epsilon^2}{2}(\mathrm{e}^{x\epsilon} + \mathrm{e}^{-x\epsilon}) + \frac{1}{2\epsilon^3}(\mathrm{e}^{x\epsilon} - \mathrm{e}^{-x\epsilon}) - \frac{x}{\epsilon^2} \\ &= \frac{\epsilon^2}{2}(\mathrm{e}^{x\epsilon} + \mathrm{e}^{-x\epsilon}) + \frac{1}{2\epsilon^3}\big(1 + \epsilon x + \frac{(\epsilon x)^2}{2!} + \frac{(\epsilon x)^3}{3!} - 1 + \epsilon x - \frac{(\epsilon x)^2}{2!} + \frac{(\epsilon x)^3}{3!} + o(\epsilon^3)\big) - \frac{x}{\epsilon^2} \\ &= \frac{\epsilon^2}{2}(\mathrm{e}^{x\epsilon} + \mathrm{e}^{-x\epsilon}) + \frac{1}{2\epsilon^3}\big(2\epsilon x + 2\frac{(\epsilon x)^3}{3!} + o(\epsilon^3)\big) - \frac{x}{\epsilon^2} \\ &= \frac{x^3}{6} + \frac{\epsilon^2}{2}(\mathrm{e}^{x\epsilon} + \mathrm{e}^{-x\epsilon}) + \frac{o(\epsilon^3)}{\epsilon^3} \end{aligned}$$

e pertanto passando al limite per $\epsilon \to 0^+$ si ha

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} y_\epsilon(x) = \frac{x^3}{6} \qquad \text{per ogni fissato } x \in \mathbb{R}.$$

Alternativamente il limite si sarebbe potuto calcolare anche scrivendo

$$y_\epsilon(x) = \epsilon^2 \cosh(\epsilon x) + \frac{\sinh(\epsilon x) - \epsilon x}{\epsilon^3},$$

e usando la regola De l'Hôpital, derivando tre volte rispetto a ϵ.

3. Studiare per $\lambda > 0$ la convergenza ed eventualmente calcolare il valore dell'integrale

$$I_\lambda := \int_\lambda^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)\log^2(x^2+1)}\,dx.$$

Determinare poi se esiste qualche $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \lambda^\alpha\, I_\lambda \quad \text{sia finito e diverso da zero.}$$

Soluzione. La funzione integranda è positiva per ogni $x > \lambda > 0$ e il denominatore non si annulla mai visto che il dominio di integrazione è $[\lambda, +\infty[$. Per la convergenza serve solo lo studio all'infinito. Per $x \to +\infty$ la funzione si comporta come

$$\frac{x}{(x^2+1)\log^2(x^2+1)} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x\log^2(x)}\Big)$$

e la funzione $\frac{1}{x\log^2(x)}$ ha integrale improprio convergente su $[e, +\infty[$.

Ora vediamo che con il cambio di variabile $1 + x^2 = y$ si ha

$$\int \frac{x}{(x^2+1)\log^2(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y\log^2(y)}\,dy = -\frac{1}{2}\frac{1}{\log(y)}_{|y=1+x^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\log(1+x^2)},$$

da cui

$$I_\lambda = \int_\lambda^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)\log^2(x^2+1)}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_\lambda^b \frac{x}{(x^2+1)\log^2(x^2+1)}\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{2}\frac{1}{\log(1+b^2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{\log(1+\lambda^2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\log(1+\lambda^2)}.$$

Si ha quindi

$$I_\lambda = \frac{1}{2}\frac{1}{\log(1+\lambda^2)} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\lambda^2}\Big) \qquad \text{per } \lambda \to 0^+$$

e inoltre, se e solo se $\alpha = 2$, si ottiene

$$\lim_{\lambda\to0^+} \lambda^2 I_\lambda = \lim_{\lambda\to0^+} \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\log(1+\lambda^2)} = \frac{1}{2}.$$

4. Determinare le eventuali soluzioni complesse dell'equazione

$$\cos(z) = 2.$$

Soluzione. Osserviamo che per qualsiasi numero reale x si ha che $\cos(x) \neq 2$. Cerchiamo così eventuali soluzioni puramente immaginarie, della forma $z = ix$. Ricordando che

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},$$

sostituendo troviamo

$$\cos(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (ix)^{2n},$$

ma $(i)^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$ e dunque

$$\cos(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh(x).$$

L'equazione $\cosh(x) = 2$ ha due soluzioni che possiamo calcolare risolvendo

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2,$$

da cui si ricava

$$e^{2x} - 4e^x + 1 = 0.$$

Risolvendo la biquadratica si ha

$$e^x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

e quindi $x = \log(2 \pm \sqrt{3}) = \pm\log(2 + \sqrt{3})$, dato che $(2 + \sqrt{3})^{-1} = 2 - \sqrt{3}$.

Osserviamo anche che la formula di Eulero $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ valida per $x \in \mathbb{R}$ può essere generalizzata a

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

dato che gli sviluppo di Taylor del lato sinistro e destro coincidono.

Da questo di deduce che se $z = x + iy$

$$\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

e quindi $\cos(x + iy) = \cos(x + 2k\pi + iy)$ e pertanto $\cos(z) = \cos(2k\pi + z)$. Possiamo quindi concludere che le soluzioni complesse di $\cos(z) = 2$ sono

$$z = 2k\pi \pm i\log(2 + \sqrt{3}) \qquad k \in \mathbb{Z}.$$