Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

25 giugno 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=352131

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

25 giugno 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=352131

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in [0, 2\pi] : \sin(x) > 1/2\}$$
valgono
A: $\{0, 0, 2\pi, 2\pi\}$ B: $\{0, 0, \pi, \pi\}$ C: N.A. D: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$ E: $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$

2. Modulo e argomento del numero complesso $z = (1 + i)^3$ sono
A: $(2, -\pi/2)$ B: N.A. C: $(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$ D: $(1, \pi)$ E: $(2\sqrt{2}, \pi/3)$

3. La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{(e^x)} & \text{per } x < 0 \\ ax^2 + 1 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$ risulta derivabile in $x = 0$ per a uguale a
A: 0 B: e C: N.A. D: $1 + e$ E: N.E.

4. Sia $x(t)$ la soluzione del problema di Cauchy $x'(t) = [x(t)]^2$ e $x(0) = 1/2$. Allora $x'(1)$ vale
A: N.A. B: N.E. C: π^2 D: 1 E: 4

5. L'integrale
$$\int_{-1}^{\infty} e^{-|x|}\, dx$$
vale
A: $\frac{2e-1}{e}$ B: 0 C: $N.E.$ D: e E: N.A.

6. La serie di potenze
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2} x^n$$
converge assolutamente per
A: $|x - 1/e| < \frac{1}{e^2}$ B: N.A. C: $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$ D: $\frac{-1}{e^2} < x < \frac{1}{e^2}$ E: $x > 0$

7. La funzione $f :]0, \infty[\setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log_x(2)$ è
A: limitata superiormente B: decrescente C: limitata inferiormente D: N.A. E: derivabile

8. Il limite
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^3 \sin(x)}$$
vale
A: $1/2$ B: N.E. C: $+\infty$ D: N.A. E: 0

9. Quante soluzioni reali ha l'equazione $x^3 - 2x^2 + x = 1$
A: 1 B: N.A. C: 2 D: 0 E: 3

10. L'integrale
$$\int_2^3 \frac{x}{x - 1}\, dx$$
vale
A: N.A. B: $1 - \log(2)$ C: $1 + \log(2)$ D: $\log(3e)$ E: $\frac{1}{2}\log(5/2)$

CODICE=352131

CODICE=352131

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

25 giugno 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=681401

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

25 giugno 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=681401

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in [0, 2\pi] : \sin(x) > 1/2\}$$
valgono
A: $\{0, 0, 2\pi, 2\pi\}$ B: $\{0, 0, \pi, \pi\}$ C: $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$ D: N.A. E: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$

2. La funzione $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^x)} & \text{per } x < 0 \\ ax^2 + 1 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$ risulta derivabile in $x = 0$ per a uguale a
A: N.E. B: e C: $1 + \mathrm{e}$ D: N.A. E: 0

3. La funzione $f :]0, \infty[\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log_x(2)$ è
A: limitata inferiormente B: N.A. C: limitata superiormente D: derivabile E: decrescente

4. Quante soluzioni reali ha l'equazione $x^3 - 2x^2 + x = 1$
A: N.A. B: 0 C: 3 D: 2 E: 1

5. L'integrale
$$\int_2^3 \frac{x}{x-1}\, dx$$
vale
A: $\frac{1}{2}\log(5/2)$ B: $\log(3\mathrm{e})$ C: $1 + \log(2)$ D: N.A. E: $1 - \log(2)$

6. L'integrale
$$\int_{-1}^{\infty} \mathrm{e}^{-|x|}\, dx$$
vale
A: $\frac{2\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$ B: N.A. C: 0 D: e E: $N.E.$

7. Il limite
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^3 \sin(x)}$$
vale
A: N.A. B: $+\infty$ C: $1/2$ D: 0 E: N.E.

8. Modulo e argomento del numero complesso $z = (1 + i)^3$ sono
A: $(1, \pi)$ B: $(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$ C: $(2, -\pi/2)$ D: N.A. E: $(2\sqrt{2}, \pi/3)$

9. Sia $x(t)$ la soluzione del problema di Cauchy $x'(t) = [x(t)]^2$ e $x(0) = 1/2$. Allora $x'(1)$ vale
A: N.A. B: N.E. C: 1 D: π^2 E: 4

10. La serie di potenze
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2} x^n$$
converge assolutamente per
A: N.A. B: $-\frac{1}{\mathrm{e}} < x < \frac{1}{\mathrm{e}}$ C: $x > 0$ D: $\frac{-1}{\mathrm{e}^2} < x < \frac{1}{\mathrm{e}^2}$ E: $|x - 1/\mathrm{e}| < \frac{1}{\mathrm{e}^2}$

CODICE=681401

CODICE=681401

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

25 giugno 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=964230

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

25 giugno 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=964230

PARTE A

1. La funzione $f :]0, \infty[\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log_x(2)$ è

   A: derivabile B: decrescente C: limitata superiormente D: N.A. E: limitata inferiormente

2. Sia $x(t)$ la soluzione del problema di Cauchy $x'(t) = [x(t)]^2$ e $x(0) = 1/2$. Allora $x'(1)$ vale

   A: N.A. B: π^2 C: 1 D: 4 E: N.E.

3. Modulo e argomento del numero complesso $z = (1 + i)^3$ sono

   A: N.A. B: $(2, -\pi/2)$ C: $(2\sqrt{2}, \pi/3)$ D: $(1, \pi)$ E: $(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$

4. Quante soluzioni reali ha l'equazione $x^3 - 2x^2 + x = 1$

   A: 2 B: 0 C: 3 D: 1 E: N.A.

5. Il limite

   $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^3 \sin(x)}$$

   vale

   A: $1/2$ B: N.A. C: 0 D: $+\infty$ E: N.E.

6. L'integrale

   $$\int_{-1}^{\infty} \mathrm{e}^{-|x|}\, dx$$

   vale

   A: 0 B: N.A. C: $N.E.$ D: $\frac{2\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$ E: e

7. La serie di potenze

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2} x^n$$

   converge assolutamente per

   A: N.A. B: $\frac{-1}{\mathrm{e}^2} < x < \frac{1}{\mathrm{e}^2}$ C: $x > 0$ D: $|x - 1/\mathrm{e}| < \frac{1}{\mathrm{e}^2}$ E: $-\frac{1}{\mathrm{e}} < x < \frac{1}{\mathrm{e}}$

8. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A = \{x \in [0, 2\pi] : \sin(x) > 1/2\}$$

   valgono

   A: $\{0, 0, 2\pi, 2\pi\}$ B: $\{0, 0, \pi, \pi\}$ C: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$ D: $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$ E: N.A.

9. La funzione $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^x)} & \text{per } x < 0 \\ ax^2 + 1 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$ risulta derivabile in $x = 0$ per a uguale a

   A: $1 + \mathrm{e}$ B: N.E. C: N.A. D: e E: 0

10. L'integrale

    $$\int_2^3 \frac{x}{x - 1}\, dx$$

    vale

    A: $\frac{1}{2}\log(5/2)$ B: $\log(3\mathrm{e})$ C: $1 - \log(2)$ D: N.A. E: $1 + \log(2)$

CODICE=964230

CODICE=964230

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

25 giugno 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=111208

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

25 giugno 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=111208

PARTE A

1. L'integrale
$$\int_2^3 \frac{x}{x-1}\,dx$$
vale
A: $1+\log(2)$ B: $1-\log(2)$ C: $\log(3\mathrm{e})$ D: N.A. E: $\frac{1}{2}\log(5/2)$

2. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in [0, 2\pi] : \sin(x) > 1/2\}$$
valgono
A: $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$ B: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$ C: N.A. D: $\{0, 0, \pi, \pi\}$ E: $\{0, 0, 2\pi, 2\pi\}$

3. Quante soluzioni reali ha l'equazione $x^3 - 2x^2 + x = 1$
A: 1 B: 3 C: 2 D: 0 E: N.A.

4. Il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^3\sin(x)}$$
vale
A: 0 B: N.A. C: N.E. D: $+\infty$ E: 1/2

5. La funzione $f :]0, \infty[\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log_x(2)$ è
A: limitata superiormente B: limitata inferiormente C: decrescente D: derivabile E: N.A.

6. La funzione $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^x)} & \text{per } x < 0 \\ ax^2+1 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$ risulta derivabile in $x = 0$ per a uguale a
A: e B: 1 + e C: N.A. D: N.E. E: 0

7. Modulo e argomento del numero complesso $z = (1 + i)^3$ sono
A: $(1, \pi)$ B: $(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$ C: N.A. D: $(2\sqrt{2}, \pi/3)$ E: $(2, -\pi/2)$

8. La serie di potenze
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2} x^n$$
converge assolutamente per
A: $x > 0$ B: $-\frac{1}{\mathrm{e}} < x < \frac{1}{\mathrm{e}}$ C: $|x - 1/\mathrm{e}| < \frac{1}{\mathrm{e}^2}$ D: $\frac{-1}{\mathrm{e}^2} < x < \frac{1}{\mathrm{e}^2}$ E: N.A.

9. L'integrale
$$\int_{-1}^{\infty} \mathrm{e}^{-|x|}\,dx$$
vale
A: e B: $\frac{2\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$ C: $N.E.$ D: N.A. E: 0

10. Sia $x(t)$ la soluzione del problema di Cauchy $x'(t) = [x(t)]^2$ e $x(0) = 1/2$. Allora $x'(1)$ vale
A: N.A. B: 1 C: N.E. D: 4 E: π^2

CODICE=111208

CODICE=111208

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

25 giugno 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	●	○	○
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	●	○
5	●	○	○	○	○
6	○	○	○	●	○
7	○	○	○	○	●
8	●	○	○	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=352131

CODICE=352131

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

25 giugno 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	●	○	○	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	●	○	○
6	●	○	○	○	○
7	○	○	●	○	○
8	○	●	○	○	○
9	○	○	●	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=681401

CODICE=681401

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

25 giugno 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	●	○	○
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	●	○
5	●	○	○	○	○
6	○	○	○	●	○
7	○	●	○	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	●	○	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=964230

CODICE=964230

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

25 giugno 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	●	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	●	○
6	○	○	○	●	○
7	○	●	○	○	○
8	○	○	○	●	○
9	○	●	○	○	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=111208

CODICE=111208

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

25 giugno 2019

PARTE B

1. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \int_1^{x^2+1} \mathrm{e}^{-t}\,dt$$

e in particolare trovare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto e quelli di flesso.

Soluzione. La funzione f risulta definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e risulta pari e non-negativa, essendo l'integrale di una funzione positiva su intervalli del tipo $[1, b]$ con $b \geq 1$. Il comportamento agli estremi si valuta studiando il limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} \int_1^{x^2+1} \mathrm{e}^{-t}\,dt = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Inoltre la derivata si calcola tramite il teorerma fondmentale del calcolo integrale e vale

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2-1}.$$

Si ha pertanto che f è strettamente decrescente in $\{x < 0\}$ e strettamente crescente per $\{x > 0\}$. Si ha quindi un punto di minimo assoluto per $x = 0$ e il minimo vale $f(0) = 0$.

La derivata seconda vale

$$f''(x) = 2\mathrm{e}^{-x^2-1}\left(1 - 2x^2\right)$$

e si hanno quindi due punti di flesso per $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Il grafico approssimativo risulta quindi essere e osserviamo che in questo caso il valore esplicito della funzione f poteva essere facilmente calcolato risolvendo l'integrale, e ottenendo

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{-(x^2+1)}$$

2. Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}y(x) = \arctan(x)\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

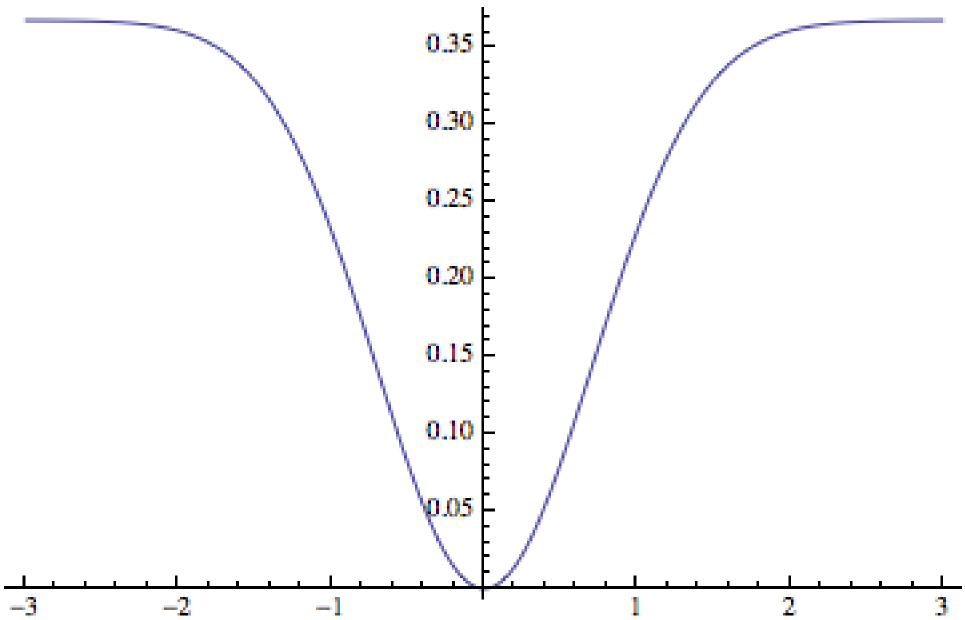

Figura 1: Grafico di $f(x) = \int_1^{x^2+1} \mathrm{e}^{-t}\,dt$.

Soluzione. Si tratta di una equazione del primo ordine a coefficienti non costanti che puó essere risolta tramite il metodo del fattore integrante. Moltiplicando per $\mathrm{e}^{\int \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ l'equazione si ottiene

$$\frac{d}{dx}\big(y(x)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\big) = \arctan(x)$$

da cui

$$y(x)\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$$

e la soluzione risulta essere

$$y(x) = \big(x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\big)\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \qquad x \geq 0.$$

Si può osservare che per $x = 0$ i coefficienti dell'equazione diventano singolari e la soluzione dovrebbe essere trovata, come limite di y_α soluzione di

$$\begin{cases} y'_\alpha(x) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} y_\alpha(x) = \arctan(x)\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \\ \\ y_\alpha(\alpha) = 0. \end{cases}$$

al tendere di $\alpha > 0$ a zero.

3. Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[x(x-1)n]^n}{n!}$$

Soluzione. Per studiare il limite usiamo la formula di Stirling per approssimare il fattoriale. Applicando il criterio della radice si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{[|x(x-1)|n]^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{[|x(x-1)|n]^n}{\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n}} = |x(x-1)|\mathrm{e}.$$

Pertanto, si ha convergenza assoluta per $|x(x-1)| < 1/\mathrm{e}$, e divergenza per $|x(x-1)| > 1/\mathrm{e}$. Nel caso $|x(x-1)| = 1/\mathrm{e}$ il termine generico non è infinitesimo e quindi non c'è convergenza. Pertanto la convergenza si ha solo per

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4+\mathrm{e}}{\mathrm{e}}} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4+\mathrm{e}}{\mathrm{e}}}$$

4. Determinare, al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ il comportamento della successione

$$a_n = \sqrt[n]{\log(n^\alpha)^{\log(n^\beta)}}.$$

Soluzione. Dato che $n \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere

$$a_n = \sqrt[n]{\alpha \log(n)^{\beta \log(n)}} = \alpha \log(n)^{\beta \frac{\log(n)}{n}}.$$

e il limite è una forma indeterminata del tipo ∞^0, eccetto che nei casi $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Nel caso $\alpha = 0$ e $\beta > 0$ si ha $a_n = 1$, mentre nel caso $\beta = 0$ e $\alpha > 0$ si ha $a_n = \sqrt[n]{\alpha \log(n)} \to 1$, per un ben noto limite notevole. Nel caso $\alpha = \beta = 0$ la successione non è definita.

Pertanto nell'unico caso non banale α e β entrambi positivi si ha

$$a_n = \mathrm{e}^{\beta \frac{\log(n)}{n} \log(\alpha \log(n))} = \mathrm{e}^{\beta \frac{\log(n)}{n} \left[\log(\alpha) + \log(\log(n))\right]}$$

e usando i limiti notevoli si ottiene

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{e}^{\beta \frac{\log(n)}{n} \left[\log(\alpha) + \log(\log(n))\right]} = 1.$$