Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

29 gennaio 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=637828

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

29 gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=637828

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x : \cos(x) \geq \frac{7}{8}\}$$
valgono
A: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$ D: $\{-1, 1, 1, N.E.\}$ E: $\{0, N.E., 1, 1\}$

2. La soluzione del problema di Cauchy $y'(t) + y(t) = 1$ e $y(0) = -1$ è
A: sempre negativa B: N.A. C: decrescente D: limitata inferiormente E: continua ma non derivabile

3. Il modulo e argomento del numero complesso $\frac{(e^{i\pi/2})^2}{|e^{i\pi}|}$ possono essere una delle seguenti coppie
A: $(1, \pi/2)$ B: $(1/2, \pi)$ C: $(\log(2), \pi)$ D: $(1, 43\pi)$ E: N.A.

4. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sqrt{2x}$ nel punto $x_0 = 1$ vale
A: $\sqrt{2} + \sqrt{2}x$ B: $\sqrt{2} + \frac{x-1}{2\sqrt{2x}}$ C: $\frac{x-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ D: $1 + x$ E: N.A.

5. Il numero dei punti di minimo relativo di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^8 - x^4$ è
A: nessuno B: 1 C: 8 D: N.A. E: 2

6. L'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^{\lambda^2+\lambda}$$
è dato dai $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che
A: nessun valore B: $\lambda > 1$ C: N.A. D: $\lambda > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ E: $\lambda > 0$

7. L'integrale
$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx$$
vale
A: 0 B: $\log(\sqrt{2})$ C: N.E. D: N.A. E: $+\infty$

8. Il limite
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\arctan(x)}{\sqrt[4]{1+x} - 1}$$
vale
A: 4 B: N.A. C: $+\infty$ D: $1/2$ E: 0

9. L'integrale in senso generalizzato
$$\int_0^1 \log(x)\, dx$$
vale
A: $\pi/3$ B: 0 C: N.E. D: N.A. E: -1

10. Data $f(x) = \sin(\pi x^x)$. Allora $f'(1)$ è uguale a
A: -1 B: 0 C: N.A. D: π E: 2^3

CODICE=637828

CODICE=637828

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

29 gennaio 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=708397

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

29 gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=708397

PARTE A

1. L'integrale
$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$$
vale
A: 0   B: N.A.   C: N.E.   D: $\log(\sqrt{2})$ E: $+\infty$

2. Data $f(x) = \sin(\pi x^x)$. Allora $f'(1)$ è uguale a
A: -1 B: N.A.   C: π D: 2^3 E: 0

3. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sqrt{2x}$ nel punto $x_0 = 1$ vale
A: $\sqrt{2} + \frac{x-1}{2\sqrt{2x}}$ B: $\sqrt{2} + \sqrt{2}x$ C: $1 + x$ D: $\frac{x-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ E: N.A.

4. Il numero dei punti di minimo relativo di $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^8 - x^4$ è
A: nessuno   B: 8   C: 2   D: N.A.   E: 1

5. Il limite
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\arctan(x)}{\sqrt[4]{1+x} - 1}$$
vale
A: $+\infty$ B: 4   C: 1/2   D: 0   E: N.A.

6. La soluzione del problema di Cauchy $y'(t) + y(t) = 1$ e $y(0) = -1$ è
A: decrescente   B: continua ma non derivabile   C: limitata inferiormente   D: sempre negativa   E: N.A.

7. L'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^{\lambda^2+\lambda}$$
è dato dai $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che
A: nessun valore   B: $\lambda > 1$ C: $\lambda > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ D: N.A.   E: $\lambda > 0$

8. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x : \cos(x) \geq \frac{7}{8}\}$$
valgono
A: N.A.   B: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$ C: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ D: $\{-1, 1, 1, N.E.\}$ E: $\{0, N.E., 1, 1\}$

9. L'integrale in senso generalizzato
$$\int_0^1 \log(x)\,dx$$
vale
A: -1 B: 0   C: $\pi/3$ D: N.A.   E: N.E.

10. Il modulo e argomento del numero complesso $\frac{(e^{i\pi/2})^2}{|e^{i\pi}|}$ possono essere una delle seguenti coppie
A: $(\log(2), \pi)$ B: $(1, 43\pi)$ C: $(1/2, \pi)$ D: N.A.   E: $(1, \pi/2)$

CODICE=708397

CODICE=708397

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

29 gennaio 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=411602

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

29 gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=411602

PARTE A

1. L'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\log\big(1+\frac{1}{n}\big)\Big]^{\lambda^2+\lambda}$$
è dato dai $\lambda\in\mathbb{R}$ tali che
A: N.A. B: $\lambda>1$ C: $\lambda>0$ D: nessun valore E: $\lambda>\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

2. La soluzione del problema di Cauchy $y'(t)+y(t)=1$ e $y(0)=-1$ è
A: N.A. B: limitata inferiormente C: decrescente D: sempre negativa E: continua ma non derivabile

3. L'integrale in senso generalizzato
$$\int_0^1 \log(x)\,dx$$
vale
A: N.A. B: N.E. C: -1 D: $\pi/3$ E: 0

4. Il limite
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\arctan(x)}{\sqrt[4]{1+x}-1}$$
vale
A: $1/2$ B: N.A. C: 4 D: 0 E: $+\infty$

5. Data $f(x)=\sin(\pi x^x)$. Allora $f'(1)$ è uguale a
A: -1 B: π C: 0 D: N.A. E: 2^3

6. Il modulo e argomento del numero complesso $\frac{(e^{i\pi/2})^2}{|e^{i\pi}|}$ possono essere una delle seguenti coppie
A: $(1,43\pi)$ B: $(1/2,\pi)$ C: $(1,\pi/2)$ D: $(\log(2),\pi)$ E: N.A.

7. La retta tangente al grafico di $y(x)=\sqrt{2x}$ nel punto $x_0=1$ vale
A: $\sqrt{2}+\frac{x-1}{2\sqrt{2x}}$ B: $\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}$ C: $1+x$ D: N.A. E: $\sqrt{2}+\sqrt{2}x$

8. L'integrale
$$\int_0^{\pi/4}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$$
vale
A: $+\infty$ B: N.E. C: N.A. D: $\log(\sqrt{2})$ E: 0

9. Il numero dei punti di minimo relativo di $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x^8-x^4$ è
A: 1 B: 2 C: 8 D: N.A. E: nessuno

10. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A=\{x:\ \cos(x)\geq\frac{7}{8}\}$$
valgono
A: $\{-1,1,1,N.E.\}$ B: $\{0,0,+\infty,N.E.\}$ C: N.A. D: $\{0,N.E.,1,1\}$ E: $\{-1,N.E.,1,N.E.\}$

CODICE=411602

CODICE=411602

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

29 gennaio 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=230019

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

29 gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=230019

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x: \; \cos(x) \geq \frac{7}{8}\}$$
valgono
A: N.A. B: $\{-1, 1, 1, N.E.\}$ C: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$ D: $\{0, N.E., 1, 1\}$ E: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$

2. Il limite
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\arctan(x)}{\sqrt[4]{1+x} - 1}$$
vale
A: N.A. B: 0 C: 4 D: $+\infty$ E: $1/2$

3. Il modulo e argomento del numero complesso $\frac{(e^{i\pi/2})^2}{|e^{i\pi}|}$ possono essere una delle seguenti coppie
A: $(\log(2), \pi)$ B: N.A. C: $(1, \pi/2)$ D: $(1, 43\pi)$ E: $(1/2, \pi)$

4. L'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]^{\lambda^2 + \lambda}$$
è dato dai $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che
A: N.A. B: nessun valore C: $\lambda > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ D: $\lambda > 0$ E: $\lambda > 1$

5. Il numero dei punti di minimo relativo di $f: \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^8 - x^4$ è
A: N.A. B: 1 C: 8 D: 2 E: nessuno

6. Data $f(x) = \sin(\pi x^x)$. Allora $f'(1)$ è uguale a
A: N.A. B: 2^3 C: 0 D: π E: -1

7. L'integrale in senso generalizzato
$$\int_0^1 \log(x) \, dx$$
vale
A: -1 B: 0 C: N.E. D: N.A. E: $\pi/3$

8. L'integrale
$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \, dx$$
vale
A: N.A. B: N.E. C: $+\infty$ D: 0 E: $\log(\sqrt{2})$

9. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sqrt{2x}$ nel punto $x_0 = 1$ vale
A: $\sqrt{2} + \frac{x-1}{2\sqrt{2x}}$ B: $1 + x$ C: $\frac{x-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ D: N.A. E: $\sqrt{2} + \sqrt{2}x$

10. La soluzione del problema di Cauchy $y'(t) + y(t) = 1$ e $y(0) = -1$ è
A: decrescente B: continua ma non derivabile C: N.A. D: sempre negativa E: limitata inferiormente

CODICE=230019

CODICE=230019

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

29 gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	●	○	○
5	○	○	○	○	●
6	○	○	●	○	○
7	○	●	○	○	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	○	●	○	○

CODICE=637828

CODICE=637828

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

29 gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	●	○	○
5	○	●	○	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	●	○
8	●	○	○	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=708397

CODICE=708397

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

29 gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	●	○	○	○	○
3	○	○	●	○	○
4	○	○	●	○	○
5	○	○	○	●	○
6	●	○	○	○	○
7	○	●	○	○	○
8	○	○	○	●	○
9	○	●	○	○	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=411602

CODICE=411602

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

29 gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	●	○	○
3	○	○	○	●	○
4	●	○	○	○	○
5	○	○	○	●	○
6	●	○	○	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	●	○	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=230019

CODICE=230019

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

29 gennaio 2019

PARTE B

1. Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, la funzione

$$f(x) = \arctan(\lambda x) + x.$$

Soluzione. La funzione f risulta definita per $x \in \mathbb{R}$ e si ha che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},$$

dato che l'arcotangente è limitata. Inoltre osservando anche che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

la funzione si comporta come $g(x) = x$ per $x \to \pm\infty$.
Calcolando la derivata prima si ha

$$f'(x) = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2 x^2} + 1,$$

pertanto se $\lambda \geq 0$ la funzione risulta monotona crescente in senso stretto, dato che $f'(x) \geq 1$.
Inoltre

$$f''(x) = -\frac{2\lambda^3 x}{(\lambda^2 x^2 + 1)^2},$$

e quindi nel caso $\lambda \geq 0$ si ha che $f''(x) \leq 0$ per $x \geq 0$ e $f''(x) \geq 0$ per $x \leq 0$, quindi f convessa per $x \leq 0$ e concava per $x \geq 0$. Osservando che la derivata prima in 0 vale $f'(0) = 1 + \lambda$ si ha un grafico qualitativo come sotto,

Se $\lambda < 0$ osserviamo che $f'(x) = 0$ se

$$x = \pm \frac{\sqrt{-\lambda - 1}}{\lambda}$$

quindi ci sono radici se e solo se $\lambda \leq -1$, e pertanto per $-1 \leq \lambda < 0$ la funzione risulta ancora monotona crescente (in particolare per $\lambda = -1$ la derivata si annulla in un solo punto). Dall'espressione per f'' ricaviamo anche che f risulta convessa per $x \geq 0$ e concava per $x \leq 0$, indipendentemente dal valore negativo di λ.

Se invece $\lambda < -1$ la derivata risulta negativa per $\frac{\sqrt{-\lambda-1}}{\lambda} < x < -\frac{\sqrt{-\lambda-1}}{\lambda}$ e positiva nei due intervalli esterni e quindi si ha un punto di massimo locale in $x_M = \frac{\sqrt{-\lambda-1}}{\lambda}$ e un punto di minimo locale in $x_m = -\frac{\sqrt{-\lambda-1}}{\lambda}$

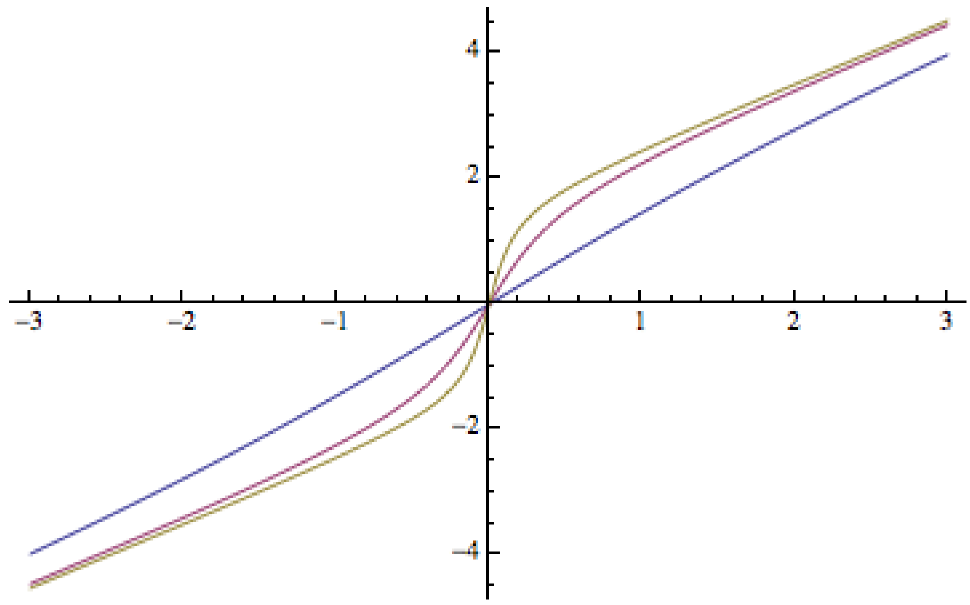

Figura 1: Grafico per $\lambda = 1/2, 2, 8$

2. Si risolva l'equazione
$$\int_0^x y(t)\,dt + y'(x) = \mathrm{e}^x,$$
con la condizione $y(0) = 0$.

Soluzione. Si tratta di una equazione integro-differenziale, ma chiamando $Y(x) = \int_0^x y(t)\,dt$ e osservando che $Y'(x) = y(x)$, la possiamo riscrivere come
$$Y(x) + Y''(x) = \mathrm{e}^x,$$
che è lineare a coefficienti costanti. Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono $\lambda = \pm i$ e quindi l'omogenea associata ha come soluzioni
$$Y_0(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x).$$
Una soluzione particolare si trova della forma $Y_f(x) = A\mathrm{e}^x$ e sostituendo si ha
$$(A + A)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x,$$
da cui $A = 1/2$. Pertanto l'integrale generale risulta
$$Y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x).$$
Osserviamo ora che $Y(0) = 0$ e quindi imponendo le condizioni iniziali $Y(0) = 0$ e $Y'(0) = y(0) = 0$ si ha il sistema
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} + c_1 = 0, \\[2ex] \dfrac{1}{2} + c_2 = 0, \end{cases}$$
per cui l'unica soluzione risulta essere
$$y(x) = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^x - \cos(x) - \sin(x)\Big].$$

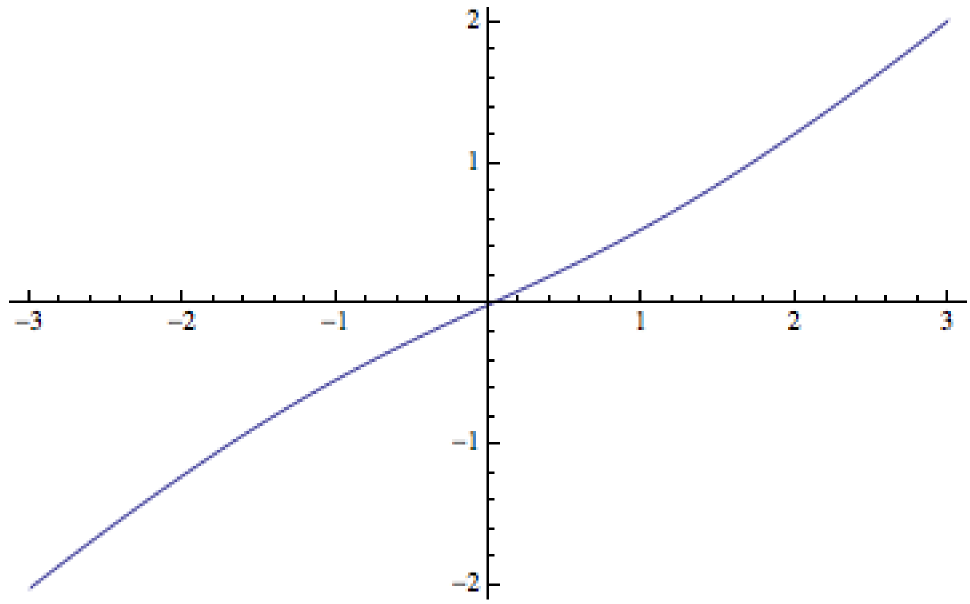

Figura 2: Grafico per $\lambda = -1, -1/4$

3. Al variare di $m \in \mathbb{Z}$, studiare la convergenza ed eventualmente calcolare il valore dell'integrale

$$\int_{e^m}^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2}\, dx.$$

Soluzione. La funzione $f(x) = \frac{\log(x)}{x^2}$ è continua e non si annulla mai in $[e^m, +\infty[$, qualsiasi sia $m \in \mathbb{Z}$. Inoltre, dalle proprietà del logaritmo si ottiene che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\log(x)}{x^{1/2}}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = 0,$$

e quindi

$$\frac{\log(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^{3/2}} \qquad \text{definitivamente},$$

e pertanto l'integrale converge per in teorema del confronto, dato che $f(x) > 0$ per $x > 1$.
Inoltre, integrando per parti si ha

$$\int_a^b \frac{\log(x)}{x^2}\, dx = -\frac{\log(x)}{x}\bigg|_a^b - \int_a^b \frac{-1}{x^2}\, dx = -\frac{\log(x)}{x} - \frac{1}{x}\bigg|_a^b,$$

e quindi

$$\int_{e^m}^{\infty} \frac{\log(x)}{x^2}\, dx = \lim_{b\to+\infty} -\frac{\log(x)}{x} - \frac{1}{x}\bigg|_{e^m}^b = \lim_{b\to+\infty} -\frac{\log(b)}{b} - \frac{1}{b} + \frac{\log(e^m)}{e^m} + \frac{1}{e^m} = \frac{m+1}{e^m}.$$

4. Sia $\phi \in C^2(\mathbb{R})$, positiva e tale che $|\phi''(x)| \leq M$. Mostrare che

$$(\phi'(x))^2 \leq 2M\phi(x) \tag{1}$$

Dedurre quindi da (1) una stima per $\frac{d}{dx}\sqrt{\phi(x)}$.

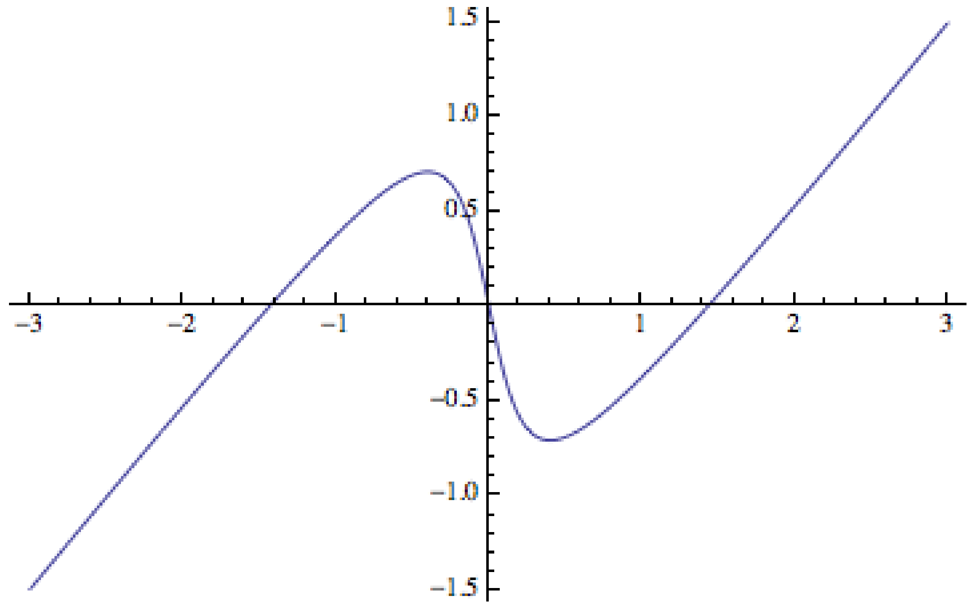

Figura 3: Grafico per $\lambda = -5$

Suggerimento. Usare lo sviluppo di Taylor per ottenere

$$\phi(x+h) = \phi(x) + \phi'(x)h + \phi''(\xi)\frac{h^2}{2} \leq \phi(x) + \phi'(x)h + M\frac{h^2}{2}.$$

Soluzione. Dato che $\phi(x+h) > 0$ e il coefficiente di h^2 è positivo abbiamo, per ogni fissato $x \in \mathbb{R}$ una parabola, in h, con la concavità rivolta verso alto che non si annulla e quindi il suo discriminante deve essere negativo. Pertanto

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\phi'(x))^2 - 4\phi(x)\frac{M}{2} < 0,$$

da cui la diseguaglianza voluta.
Inoltre calcolando la derivata di $\sqrt{\phi(x)}$ si ha

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\phi(x)} = \frac{\phi'(x)}{2\sqrt{\phi(x)}},$$

e quindi

$$\left|\frac{d}{dx}\sqrt{\phi(x)}\right| = \left|\frac{\phi'(x)}{2\sqrt{\phi(x)}}\right| \leq \frac{\sqrt{2M\phi(x)}}{2\sqrt{\phi(x)}} \leq \sqrt{\frac{M}{2}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$