Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 febbraio 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=004988

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 febbraio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=004988

PARTE A

1. L'integrale
$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\, dx$$
vale
A: $\log(\pi/4)$ B: -1 C: 0 D: $\log(\sqrt{2})$ E: N.A.

2. Il limite
$$\lim_{n\to+\infty} \arctan\big(\frac{n^{n+1/2}}{n!}\big)$$
vale
A: $\pi/2$ B: 0 C: 1 D: $+\infty$ E: N.A.

3. La soluzione del problema di Cauchy $y'(x) = x$ con $y(0) = -1$, nel punto $x_1 = \sqrt{2}$ vale
A: N.A. B: -1 C: 0 D: $\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ E: 1

4. Per $\lambda > 0$ il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{2+n} x^n$$
vale
A: λ^{-2} B: N.A. C: π/e D: 1 E: λ^2

5. L'integrale
$$\int_0^2 \sqrt{1+|x|}\, dx$$
vale
A: $\frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{3}$ B: $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$ C: N.E. D: 0 E: N.A.

6. La funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^{1/3}$ è
A: monotona crescente B: $\int_1^\infty f(x) < +\infty$ C: iniettiva D: concava E: N.A.

7. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x : \quad \frac{3}{2} < x \le 4\}$$
valgono
A: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{9/4, 9/4, 16, N.E.\}$ D: $\{9/4, N.E., 16, 16\}$ E: $\{2, 2, 16, 16\}$

8. Data $f(x) = \cos(\pi x^x)$. Allora $f'(1)$ è uguale a
A: N.A. B: 0 C: 2^3 D: π E: -1

9. Modulo e argomento del numero complesso $z = (\log|i| + i\log|2i|)^2$ valgono
A: $(\log^2(2), \pi)$ B: $(2, \pi)$ C: $(1, 43\pi)$ D: $(\log 2, \pi/2)$ E: N.A.

10. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(\arctan(2x))$ nel punto $x_0 = 0$ vale
A: $\frac{\pi}{2} + x$ B: $1 + x$ C: 0 D: x E: N.A.

CODICE=004988

CODICE=004988

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 febbraio 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=541611

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 febbraio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=541611

PARTE A

1. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(\arctan(2x))$ nel punto $x_0 = 0$ vale
   A: x B: 0 C: N.A. D: $\frac{\pi}{2} + x$ E: $1 + x$

2. L'integrale
   $$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\, dx$$
   vale
   A: N.A. B: $\log(\sqrt{2})$ C: -1 D: $\log(\pi/4)$ E: 0

3. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^{1/3}$ è
   A: concava B: iniettiva C: $\int_1^\infty f(x) < +\infty$ D: monotona crescente E: N.A.

4. Data $f(x) = \cos(\pi x^x)$. Allora $f'(1)$ è uguale a
   A: 2^3 B: 0 C: -1 D: π E: N.A.

5. Per $\lambda > 0$ il raggio di convergenza della serie di potenze
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{2+n} x^n$$
   vale
   A: N.A. B: λ^{-2} C: 1 D: π/e E: λ^2

6. L'integrale
   $$\int_0^2 \sqrt{1 + |x|}\, dx$$
   vale
   A: N.E. B: N.A. C: $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$ D: 0 E: $\frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{3}$

7. Inf, min, sup e max dell'insieme
   $$A = \{x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x : \quad \frac{3}{2} < x \le 4\}$$
   valgono
   A: N.A. B: $\{9/4, N.E., 16, 16\}$ C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{9/4, 9/4, 16, N.E.\}$ E: $\{2, 2, 16, 16\}$

8. Modulo e argomento del numero complesso $z = (\log|i| + i \log|2i|)^2$ valgono
   A: N.A. B: $(1, 43\pi)$ C: $(\log 2, \pi/2)$ D: $(2, \pi)$ E: $(\log^2(2), \pi)$

9. La soluzione del problema di Cauchy $y'(x) = x$ con $y(0) = -1$, nel punto $x_1 = \sqrt{2}$ vale
   A: -1 B: $\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ C: 1 D: N.A. E: 0

10. Il limite
    $$\lim_{n \to +\infty} \arctan\left(\frac{n^{n+1/2}}{n!}\right)$$
    vale
    A: $\pi/2$ B: 0 C: N.A. D: $+\infty$ E: 1

CODICE=541611

CODICE=541611

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 febbraio 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=295389

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 febbraio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=295389

PARTE A

1. La funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^{1/3}$ è

   A: iniettiva B: monotona crescente C: $\int_1^{\infty} f(x) < +\infty$ D: N.A. E: concava

2. Modulo e argomento del numero complesso $z = (\log|i| + i\log|2i|)^2$ valgono

   A: $(1, 43\pi)$ B: N.A. C: $(\log^2(2), \pi)$ D: $(2, \pi)$ E: $(\log 2, \pi/2)$

3. La soluzione del problema di Cauchy $y'(x) = x$ con $y(0) = -1$, nel punto $x_1 = \sqrt{2}$ vale

   A: 0 B: $\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ C: 1 D: -1 E: N.A.

4. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A = \{x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x : \quad \frac{3}{2} < x \leq 4\}$$

   valgono

   A: $\{9/4, N.E., 16, 16\}$ B: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ C: $\{9/4, 9/4, 16, N.E.\}$ D: N.A. E: $\{2, 2, 16, 16\}$

5. L'integrale

   $$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\, dx$$

   vale

   A: -1 B: $\log(\pi/4)$ C: 0 D: $\log(\sqrt{2})$ E: N.A.

6. L'integrale

   $$\int_0^2 \sqrt{1 + |x|}\, dx$$

   vale

   A: $\frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{3}$ B: $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$ C: N.A. D: 0 E: N.E.

7. Data $f(x) = \cos(\pi x^x)$. Allora $f'(1)$ è uguale a

   A: -1 B: 2^3 C: π D: N.A. E: 0

8. Il limite

   $$\lim_{n\to+\infty} \arctan\left(\frac{n^{n+1/2}}{n!}\right)$$

   vale

   A: N.A. B: $+\infty$ C: $\pi/2$ D: 1 E: 0

9. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(\arctan(2x))$ nel punto $x_0 = 0$ vale

   A: 0 B: $\frac{\pi}{2} + x$ C: $1 + x$ D: x E: N.A.

10. Per $\lambda > 0$ il raggio di convergenza della serie di potenze

    $$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{2+n} x^n$$

    vale

    A: N.A. B: 1 C: π/e D: λ^2 E: λ^{-2}

CODICE=295389

CODICE=295389

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 febbraio 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=247587

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 febbraio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=247587

PARTE A

1. L'integrale
$$\int_0^2 \sqrt{1+|x|}\,dx$$
vale
A: $\frac{2}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}+2\sqrt{3}$ B: N.E. C: $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}$ D: 0 E: N.A.

2. La funzione $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=|x|^{1/3}$ è
A: $\int_1^\infty f(x)<+\infty$ B: monotona crescente C: iniettiva D: N.A. E: concava

3. Modulo e argomento del numero complesso $z=(\log|i|+i\log|2i|)^2$ valgono
A: $(\log 2,\pi/2)$ B: N.A. C: $(1,43\pi)$ D: $(2,\pi)$ E: $(\log^2(2),\pi)$

4. Il limite
$$\lim_{n\to+\infty}\arctan\left(\frac{n^{n+1/2}}{n!}\right)$$
vale
A: $\pi/2$ B: 0 C: 1 D: N.A. E: $+\infty$

5. Data $f(x)=\cos(\pi x^x)$. Allora $f'(1)$ è uguale a
A: N.A. B: π C: 0 D: -1 E: 2^3

6. L'integrale
$$\int_0^{\pi/4}\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx$$
vale
A: $\log(\pi/4)$ B: N.A. C: -1 D: 0 E: $\log(\sqrt{2})$

7. Per $\lambda>0$ il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{2+n}x^n$$
vale
A: π/e B: λ^2 C: 1 D: N.A. E: λ^{-2}

8. La retta tangente al grafico di $y(x)=\sin(\arctan(2x))$ nel punto $x_0=0$ vale
A: $1+x$ B: 0 C: N.A. D: x E: $\frac{\pi}{2}+x$

9. La soluzione del problema di Cauchy $y'(x)=x$ con $y(0)=-1$, nel punto $x_1=\sqrt{2}$ vale
A: 1 B: N.A. C: $\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ D: -1 E: 0

10. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A=\{x^3-\frac{9}{2}x^2+6x:\quad \frac{3}{2}<x\le 4\}$$
valgono
A: $\{9/4, N.E., 16, 16\}$ B: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ C: $\{9/4, 9/4, 16, N.E.\}$ D: N.A. E: $\{2, 2, 16, 16\}$

CODICE=247587

CODICE=247587

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 febbraio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	●	○	○	○	○
3	○	○	●	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	●	○	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	○	●
8	○	●	○	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=004988

CODICE=004988

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 febbraio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	●	○	○	○	○
3	○	○	○	○	●
4	○	●	○	○	○
5	●	○	○	○	○
6	○	○	●	○	○
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	○	●
10	●	○	○	○	○

CODICE=541611

CODICE=541611

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 febbraio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	●	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	○	●	○	○	○
7	○	○	○	○	●
8	○	○	●	○	○
9	○	○	○	○	●
10	●	○	○	○	○

CODICE=295389

CODICE=295389

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 febbraio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	○	●	○
3	○	○	○	○	●
4	●	○	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	○	●	○	○	○
7	○	○	○	●	○
8	○	○	●	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	○	●

CODICE=247587

CODICE=247587

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 febbraio 2019

PARTE B

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \sin(\arctan(x^3))$$
e in particolare trovare i punti di flesso. Per fare questo dimostrare che
$$\cos(\arctan(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Soluzione. La funzione $f(x)$ risulta definita e derivabile per $x \in \mathbb{R}$ (composizione di funzioni derivabili) e si tratta di una funzione dispari, infatti
$$f(-x) = \sin(\arctan(-x^3)) = \sin(-\arctan(x^3)) = -\sin(\arctan(x^3)) = -f(x),$$
dato che sia il seno che l'arcotangente sono dispari.

Inoltre
$$\lim_{x\to+\infty} \sin(\arctan(x^3)) = \sin(\pi/2) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} \sin(\arctan(x^3)) = \sin(-\pi/2) = -1.$$

Calcolando la derivata prima si ha
$$f'(x) = \cos(\arctan(x^3))\frac{3x^2}{1+x^6},$$
e la funzione risulta crescente in senso stretto su tutto $\mathbb{R}$ dato che $0 \leq \cos(y) < 1$ per $-\pi/2 < y < \pi/2$ (dove $y = \arctan(x^3)$) e pertanto
$$f'(x) \geq 0 \qquad \text{e} \qquad f'(x) = 0 \ \leftrightarrow x = 0.$$

Per il calcolo dei punti di flesso sarà utile usare la formula suggerita, con $t = x^3$. Usandola si ha
$$f'(x) = \cos(\arctan(x^3))\frac{3x^2}{1+x^6} = \frac{3x^2}{(1+x^6)^{3/2}},$$
e quindi
$$f''(x) = \frac{6x - 21x^7}{(x^6+1)^{5/2}}.$$

Pertanto i punti di flesso sono le soluzioni (dove c'è cambio di segno) di
$$6x - 21x^7 = 3x(2 - 7x^6) = 0$$

da cui i tre punti di flesso sono

$$x_{1/2} = \pm\sqrt[6]{\frac{2}{7}}, \qquad x_3 = 0,$$

e la funzione risulta convessa per $x \in]-\infty, -\sqrt[6]{2/7}[\cup]0, \sqrt[6]{2/7}[$.

Il grafico approssimativo risulta il seguente

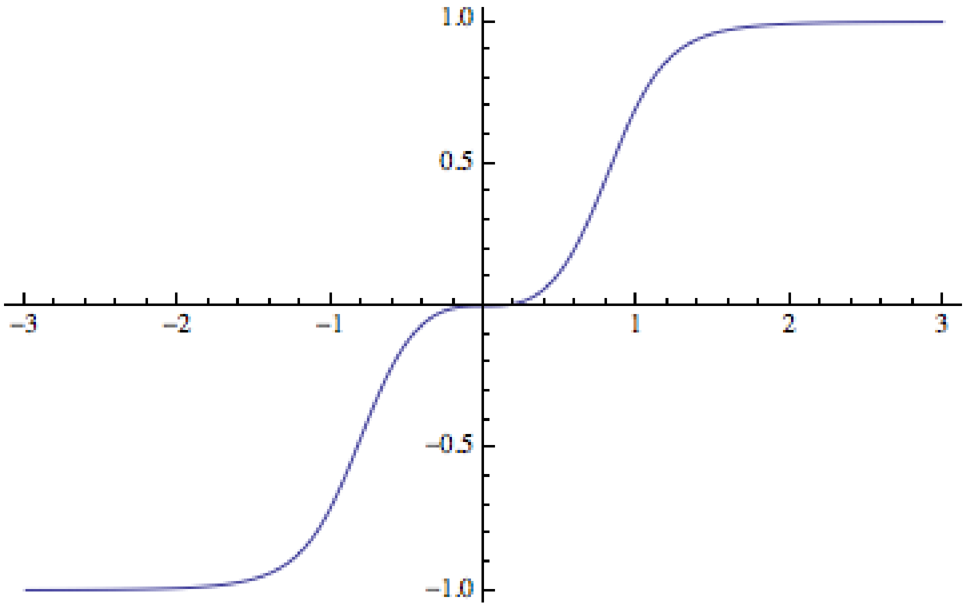

Figura 1: Grafico di $f(x) = \sin(\arctan(x^3))$

Dimostriamo ora la formula suggerita

$$\cos(\arctan(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

una maniera può essere quella di scrivere $z = \arctan(t)$ e quindi $t = \tan(z)$ ($z \in]-\pi/2, \pi/2[$) e di verificare che

$$\cos(z) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(z)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sin^2(z)}{\cos^2(z)}}} = \sqrt{\frac{\cos^2(z)}{\cos^2(z)+\sin^2(z)}} = |\cos(z)|,$$

ma per $z \in]-\pi/2, \pi/2[$ il coseno è non negativo e quindi $|\cos(z)| = \cos(z)$ e l'uguaglianza è verificata.

2. Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = \cos(x) + \mathrm{e}^x \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Si tratta di equazione lineare a coefficienti costanti non omogenea. L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda + 1 = 0$, quindi le soluzione dell'omognenea associata sono

$$Y(x) = c\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Il termine $f = f_1 + f_2$, con $f_1(x) = \cos(x)$ e $f_2(x) = \mathrm{e}^x$. Per nessuno dei due si ha risonanza e quindi le soluzioni vanno cercate della forma

$$y_{f_1}(x) = A\cos(x) + B\sin(x) \qquad y_{f_2}(x) = C\mathrm{e}^x$$

e sostituendo si ricava con facili calcoli

$$y_{f_1} = \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) \qquad y_{f_2} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x,$$

per cui l'integrale generale risulta

$$y(x) = c\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x.$$

Imponendo la condizione iniziale si ha

$$y(0) = c + 1$$

e quindi $c = -1$ e la soluzione cercata risulta essere

$$y(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x,$$

3. Calcolare

$$\int_1^2 x\arctan(\sqrt{x^2-1})\,dx$$

Soluzione. La funzione integranda è continua in $[1,2]$, quindi l'integrale esiste. La funzione $\arctan(\sqrt{x^2-1})$ è però derivabile solo per $x \in]1,2]$ e per poter applicare la formula di integrazione per parti bisogna calcolare l'integrale come integrale improprio. Si ha quindi

$$\int_1^2 x\arctan(\sqrt{x^2-1})\,dx = \lim_{a\to 1^+}\int_a^2 x\arctan(\sqrt{x^2-1})\,dx$$

e pertanto, visto che per $1 < a \leq 2$ i calcoli sono giustificati,

$$\int_a^2 x\arctan(\sqrt{x^2-1})\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan(\sqrt{x^2-1})\Big|_a^2 - \int_a^2 \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2-1}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx,$$

e studiamone il limite visto che la funzione integranda $\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ non è limitata nell'intorno di $x = 1$.

L"integrale a destra dell'uguale può essere calcolato come segue

$$\lim_{a\to 1^+}\frac{1}{4}\int_a^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \lim_{a\to 1^+}\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\Big|_a^2.$$

Si ha quindi

$$\int_1^2 x\arctan(\sqrt{x^2-1})\,dx = \lim_{a\to 1^+}\frac{x^2}{2}\arctan(\sqrt{x^2-1}) - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\Big|_a^2 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Studiare i limiti

$$\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^{\left[x^{(x^x)}\right]}$$

Soluzione. Per studiare i limiti ricordiamo il limite notevole

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1. \tag{1}$$

Pertanto il primo limite non è una forma indeterminata dato che si tratta di una forma del tipo “0^1” e quindi

$$\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)} = 0.$$

Lo studio del secondo limite risulta più complesso dato che, usando il primo limite si tratta di una forma indeterminata del tipo “0^0”.

Per calcolare il limite riscriviamolo nella forma esponenziale

$$x^{\left[x^{(x^x)}\right]} = \mathrm{e}^{x^{(x^x)}\log(x)},$$

e dal limite precedente si ha che l'esponente è una forma del tipo “$0 \cdot (-\infty)$”.

Per risolvere tale forma indeterminata osserviamo che dal limite (1) si ottiene che

$$\exists\, \delta > 0 : \qquad \frac{1}{2} < x^x < \frac{3}{2} \qquad \forall\, x \in]0, \delta[,$$

e quindi

$$x^{3/2} < x^{(x^x)} < x^{1/2} \qquad \forall\, x \in]0, \delta[,$$

e pertanto, visto che il $\log(x) < 0$ per $0 < x < 1$

$$x^{1/2}\log(x) < x^{(x^x)}\log(x) < x^{3/2}\log(x) \qquad \text{per } 0 < x < \min\{1, \delta\}.$$

Usando i limiti notevoli e il teorema dei carabinieri si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)}\log(x) = 0$$

e quindi per la continuità dell'esponenziale

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\left[x^{(x^x)}\right]} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x^{(x^x)}\log(x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)}\log(x)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$