Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=138990

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=138990

PARTE A

1. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{43}$ sono

   A: $(1, 4\pi/3)$ B: $(1, 43\pi)$ C: $(1, 3\pi/2)$ D: $(2, 3\pi/2)$ E: N.A.

2. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{256}{81\pi} & \text{per } x < 0 \\ \cos(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: N.A. B: è continua, ma non derivabile. C: è derivabile, ma non continua. D: non è né continua né derivabile. E: è continua e derivabile.

3. Le soluzioni dell'equazione differenziale $x''(t) = \sin(t)$ sono

   A: N.E. B: $c_1 + c_2 t - \sin(t)$ C: $\sin(t) + e^t + c$ D: N.A. E: $-\cos(t) + c$

4. L'integrale
   $$\int_{-1}^{2} x|x|\, dx$$
   vale

   A: 0 B: N.A. C: $-2/3$ D: 3 E: $7/3$

5. Data $f(x) = (\log(2x^3))^2$. Allora $f'(1)$ è uguale a

   A: 2^3 B: $\log^2(2^6)$ C: e D: N.A. E: $\log(64)$

6. La retta tangente al grafico di $y(x) = \tan(2x)$ nel punto $x_0 = \pi/8$ vale

   A: $1 + \left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ B: $1 + 4x$ C: $1 + 2x - \frac{\pi}{8}$ D: N.A. E: $4x + 1 - \frac{\pi}{2}$

7. La serie a termini non-negativi
   $$\sum_{n=41}^{\infty} n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$
   converge se e solo se

   A: $\alpha > 1$ B: $\alpha \geq 1$ C: $3 < \alpha < \pi$ D: N.A. E: $\alpha > 0$

8. Il limite
   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(x^3 + 2\cos(x))}{3\log(x)}$$
   vale

   A: N.E. B: $+\infty$ C: N.A. D: 1 E: 0

9. Inf, min, sup e max dell'insieme
   $$A = \{\sin(x) : \; x < 0\}$$
   valgono

   A: $\{0, N.E., 1, 1\}$ B: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ C: $\{-1, 1, 1, N.E.\}$ D: N.A. E: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$

10. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x+1|^2$ è

    A: N.A. B: surgettiva C: monotona crescente D: iniettiva E: derivabile ovunque

CODICE=138990

CODICE=138990

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=005942

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=005942

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{\sin(x) : \ x < 0\}$$

valgono

A: N.A. B: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{-1, 1, 1, N.E.\}$ E: $\{0, N.E., 1, 1\}$

2. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{256}{81\pi} & \text{per } x < 0 \\ \cos(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

A: N.A. B: è continua e derivabile. C: è derivabile, ma non continua. D: non è né continua né derivabile. E: è continua, ma non derivabile.

3. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x+1|^2$ è

A: derivabile ovunque B: iniettiva C: surgettiva D: N.A. E: monotona crescente

4. Le soluzioni dell'equazione differenziale $x''(t) = \sin(t)$ sono

A: N.E. B: $\sin(t) + e^t + c$ C: $c_1 + c_2 t - \sin(t)$ D: N.A. E: $-\cos(t) + c$

5. La retta tangente al grafico di $y(x) = \tan(2x)$ nel punto $x_0 = \pi/8$ vale

A: $1 + \left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ B: $4x + 1 - \frac{\pi}{2}$ C: $1 + 2x - \frac{\pi}{8}$ D: $1 + 4x$ E: N.A.

6. Data $f(x) = (\log(2x^3))^2$. Allora $f'(1)$ è uguale a

A: 2^3 B: N.A. C: $\log^2\left(2^6\right)$ D: e E: $\log(64)$

7. L'integrale

$$\int_{-1}^{2} x|x| \, dx$$

vale

A: 0 B: $-2/3$ C: $7/3$ D: 3 E: N.A.

8. La serie a termini non-negativi

$$\sum_{n=41}^{\infty} n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

converge se e solo se

A: N.A. B: $\alpha > 0$ C: $\alpha > 1$ D: $3 < \alpha < \pi$ E: $\alpha \geq 1$

9. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{43}$ sono

A: $(2, 3\pi/2)$ B: N.A. C: $(1, 43\pi)$ D: $(1, 4\pi/3)$ E: $(1, 3\pi/2)$

10. Il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(x^3 + 2\cos(x))}{3\log(x)}$$

vale

A: N.E. B: 0 C: $+\infty$ D: N.A. E: 1

CODICE=005942

CODICE=005942

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=484284

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=484284

PARTE A

1. La funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x+1|^2$ è

   A: derivabile ovunque   B: N.A.   C: surgettiva   D: monotona crescente   E: iniettiva

2. L'integrale
$$\int_{-1}^{2} x|x|\,dx$$
   vale

   A: $7/3$ B: $-2/3$ C: N.A.   D: 3   E: 0

3. La retta tangente al grafico di $y(x) = \tan(2x)$ nel punto $x_0 = \pi/8$ vale

   A: $1 + \left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ B: $4x + 1 - \frac{\pi}{2}$ C: $1 + 4x$ D: N.A.   E: $1 + 2x - \frac{\pi}{8}$

4. Data $f(x) = (\log(2x^3))^2$. Allora $f'(1)$ è uguale a

   A: $\log^2\left(2^6\right)$ B: 2^3 C: N.A.   D: $\log(64)$ E: e

5. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{\sin(x):\ x < 0\}$$
   valgono

   A: $\{-1, 1, 1, N.E.\}$ B: N.A.   C: $\{0, N.E., 1, 1\}$ D: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ E: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$

6. La serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=41}^{\infty} n^2 \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$
   converge se e solo se

   A: $\alpha > 1$ B: $3 < \alpha < \pi$ C: $\alpha > 0$ D: $\alpha \geq 1$ E: N.A.

7. Le soluzioni dell'equazione differenziale $x''(t) = \sin(t)$ sono

   A: N.E.   B: $-\cos(t) + c$ C: $c_1 + c_2 t - \sin(t)$ D: N.A.   E: $\sin(t) + e^t + c$

8. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{256}{81\pi} & \text{per } x < 0 \\ \cos(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: non è né continua né derivabile.   B: N.A.   C: è derivabile, ma non continua.   D: è continua e derivabile.   E: è continua, ma non derivabile.

9. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{43}$ sono

   A: $(1, 3\pi/2)$ B: N.A.   C: $(2, 3\pi/2)$ D: $(1, 4\pi/3)$ E: $(1, 43\pi)$

10. Il limite
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(x^3 + 2\cos(x))}{3\log(x)}$$
   vale

   A: N.A.   B: $+\infty$ C: N.E.   D: 1   E: 0

CODICE=484284

CODICE=484284

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=658369

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=658369

PARTE A

1. La serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=41}^{\infty} n^2 \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$$
converge se e solo se

   A: $\alpha \geq 1$ B: $\alpha > 0$ C: N.A. D: $\alpha > 1$ E: $3 < \alpha < \pi$

2. Le soluzioni dell'equazione differenziale $x''(t) = \sin(t)$ sono

   A: N.E. B: N.A. C: $\sin(t) + e^t + c$ D: $-\cos(t) + c$ E: $c_1 + c_2 t - \sin(t)$

3. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{43}$ sono

   A: $(1, 43\pi)$ B: $(1, 4\pi/3)$ C: N.A. D: $(1, 3\pi/2)$ E: $(2, 3\pi/2)$

4. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{\sin(x) :\ x < 0\}$$
valgono

   A: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{-1, 1, 1, N.E.\}$ D: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$ E: $\{0, N.E., 1, 1\}$

5. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{256}{81\pi} & \text{per } x < 0 \\ \cos(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: è continua e derivabile. B: è derivabile, ma non continua. C: N.A. D: non è né continua né derivabile. E: è continua, ma non derivabile.

6. La retta tangente al grafico di $y(x) = \tan(2x)$ nel punto $x_0 = \pi/8$ vale

   A: $1 + \left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ B: $1 + 4x$ C: $4x + 1 - \frac{\pi}{2}$ D: $1 + 2x - \frac{\pi}{8}$ E: N.A.

7. L'integrale
$$\int_{-1}^{2} x|x|\, dx$$
vale

   A: $7/3$ B: $-2/3$ C: N.A. D: 3 E: 0

8. Il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x^3 + 2\cos(x))}{3\log(x)}$$
vale

   A: $+\infty$ B: 0 C: N.E. D: 1 E: N.A.

9. Data $f(x) = (\log(2x^3))^2$. Allora $f'(1)$ è uguale a

   A: $\log^2\left(2^6\right)$ B: 2^3 C: $\log(64)$ D: e E: N.A.

10. La funzione $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x+1|^2$ è

    A: derivabile ovunque B: N.A. C: monotona crescente D: surgettiva E: iniettiva

CODICE=658369

CODICE=658369

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=055165

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=055165

PARTE A

1. La funzione $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=|x+1|^2$ è

   A: surgettiva B: monotona crescente C: iniettiva D: derivabile ovunque E: N.A.

2. Le soluzioni dell'equazione differenziale $x''(t)=\sin(t)$ sono

   A: N.A. B: $\sin(t)+e^t+c$ C: N.E. D: $-\cos(t)+c$ E: $c_1+c_2t-\sin(t)$

3. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A=\{\sin(x):\ x<0\}$$

   valgono

   A: $\{-1,1,1,N.E.\}$ B: $\{-\infty,N.E.,+\infty,N.E.\}$ C: N.A. D: $\{0,N.E.,1,1\}$ E: $\{-1,N.E.,1,N.E.\}$

4. L'integrale

$$\int_{-1}^{2} x|x|\,dx$$

   vale

   A: N.A. B: $-2/3$ C: 0 D: 3 E: $7/3$

5. La funzione $f(x)=\begin{cases}\dfrac{256}{81\pi} & \text{per } x<0\\[2ex] \cos(x) & \text{per } x\geq 0\end{cases}$

   A: è continua e derivabile. B: non è né continua né derivabile. C: è derivabile, ma non continua. D: è continua, ma non derivabile. E: N.A.

6. La serie a termini non-negativi

$$\sum_{n=41}^{\infty} n^2\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

   converge se e solo se

   A: $\alpha\geq 1$ B: N.A. C: $3<\alpha<\pi$ D: $\alpha>1$ E: $\alpha>0$

7. Il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(x^3+2\cos(x))}{3\log(x)}$$

   vale

   A: N.A. B: 1 C: $+\infty$ D: 0 E: N.E.

8. Data $f(x)=(\log(2x^3))^2$. Allora $f'(1)$ è uguale a

   A: $\log^2\left(2^6\right)$ B: N.A. C: e D: 2^3 E: $\log(64)$

9. La retta tangente al grafico di $y(x)=\tan(2x)$ nel punto $x_0=\pi/8$ vale

   A: $1+2x-\frac{\pi}{8}$ B: $1+4x$ C: $1+\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$ D: $4x+1-\frac{\pi}{2}$ E: N.A.

10. Modulo e argomento del numero complesso $z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{43}$ sono

    A: $(1,43\pi)$ B: N.A. C: $(1,3\pi/2)$ D: $(1,4\pi/3)$ E: $(2,3\pi/2)$

CODICE=055165

CODICE=055165

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	○	●	○
3	○	●	○	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	●	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	●	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=138990

CODICE=138990

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	○	●	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	●	○	○
5	○	●	○	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	●	○	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	●	○	○	○

CODICE=005942

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	●	○	○	○	○
3	○	●	○	○	○
4	○	○	○	●	○
5	○	●	○	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	●	○	○
8	●	○	○	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=484284

CODICE=484284

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	●	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	●	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	●	○	○	○
9	○	○	●	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=658369

CODICE=658369

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	●	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	●	○	○	○
6	○	●	○	○	○
7	○	○	○	●	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	●	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=055165

CODICE=055165

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2019

PARTE B

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{\log(x)}{(x-1)^2}.$$

Soluzione. La funzione risulta definita per $x > 0$ e $x \neq 1$ e continua e derivabile nello stesso insieme. Studiando i limiti agli estremi del dominio si ottiene, usando i limiti notevoli elementari si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

Inoltre, la funzione f risulta negativa per $0 < x < 1$ e positiva per $x > 1$.

Passando allo studio della derivata prima si ottiene

$$f'(x) = \frac{x - 1 - 2x\log(x)}{(x-1)^3 x},$$

e in particolare
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty.$$

Per studiare il segno di f' serve capire il segno del numeratore

$$g(x) = x - 1 - 2x\log(x),$$

essendo lo studio del segno del denominatore elementare.

Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -1 \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty \qquad g(1) = 0.$$

Passando alla derivata prima di g si ha $g'(x) = -1 - 2\log(x)$, che risulta positiva per $0 < x < \mathrm{e}^{-1/2}$ e negativa per $x > \mathrm{e}^{-1/2}$, e si annulla per $x_0 = \mathrm{e}^{-1/2}$ pertanto il grafico approssimativo di g risulta il seguente, vedi Fig. 1

Dal segno della derivata si ricava pertanto che g risulta positiva in $]\overline{x}, 1[$, dove il punto $\overline{x}$ soddisfa $0 < \overline{x} < x_0$, dove $x_0 = \mathrm{e}^{-1/2}$ è il punto di massimo di g.

CODICE=055165

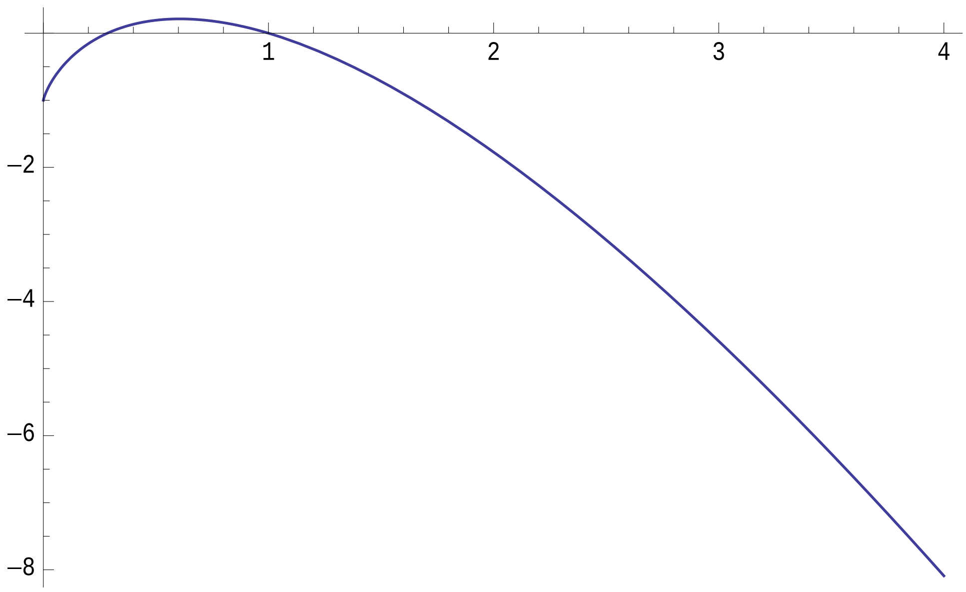

Figura 1: Grafico del numeratore g di f'

Dal segno del numeratore si ricava quindi che

$$f'(x) \quad \text{è} \quad \begin{cases} \text{maggiore di zero per } 0 < x < \overline{x}, \\ \\ \text{minore di zero per } \overline{x} < x < 1 \quad \text{e} \quad x > 1. \end{cases}$$

Si ha pertanto che l'unico massimo locale sia per $x = \overline{x}$, mentre non ci sono punti di minimo locale. Il grafico approssimativo della funzione f risulta il seguente

2. Si risolva, per $\lambda \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'_\lambda(x) - y_\lambda(x) = \mathrm{e}^{(1+\lambda^2)x} \\ \\ y_\lambda(0) = 0 \end{cases}$$

Si determini poi se esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che la soluzione soddisfa

$$\lim_{x\to+\infty} y_\lambda(x) = +\infty$$

Soluzione. L'equazione omogenea associata $Y' - Y = 0$ ha equazione caratteristica $\xi - 1 = 0$ e come soluzioni

$$Y(x) = c_1\mathrm{e}^x.$$

Pertanto nel caso $1 + \lambda^2 \neq 1$, che corrisponde a $\lambda \neq 0$ non si ha risonanza e una soluzione particolare va cercata della forma $y_f = a\mathrm{e}^{(1+\lambda^2)x}$. Sostituendo si ottiene

$$\big[a(1 + \lambda^2) - a\big]\mathrm{e}^{(1+\lambda^2)x} = \mathrm{e}^{(1+\lambda^2)x},$$

da cui $a = 1/\lambda^2$. L'integrale generale risulta pertanto

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^x + \frac{1}{\lambda^2}\mathrm{e}^{(1+\lambda^2)x},$$

e imponendo la condizione iniziale si ha

$$y_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^2}\Big[- \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{(1+\lambda^2)x}\Big] \qquad \lambda \neq 1.$$

CODICE=055165

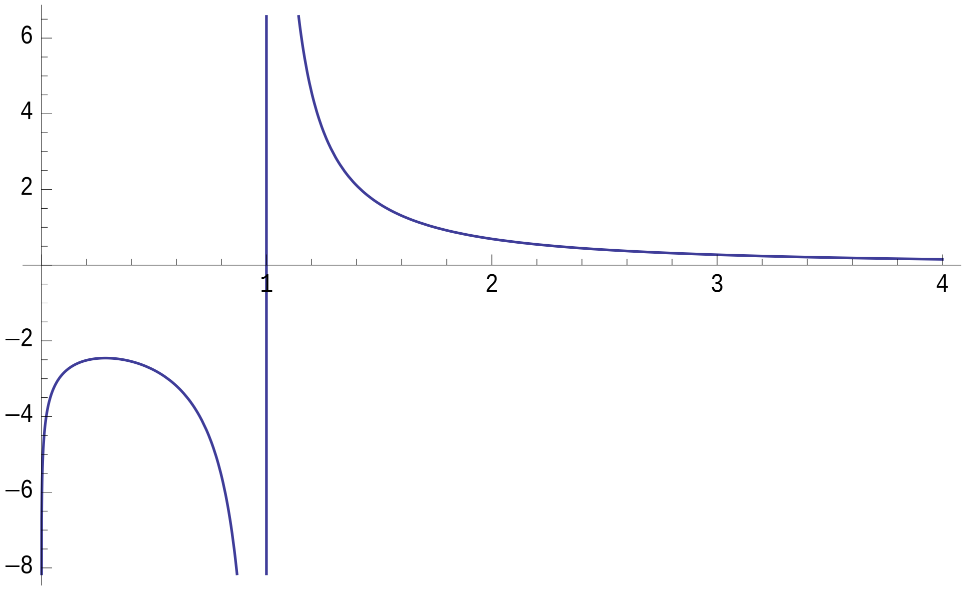

Figura 2: Grafico approssimativo di f

Nel caso $\lambda = 0$ si ha risonanza e la soluzione particolare va cercata della forma $y_f = ax\mathrm{e}^x$ e sostituendo

$$a\mathrm{e}^x + ax\mathrm{e}^x - ax\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$$

da cui $a = 1$. L'integrale generale risulta

$$y_1(x) = c_1\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x,$$

per cui la soluzione del problema di Cauchy è

$$y_1(x) = x\mathrm{e}^x.$$

3. Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare il valore dell'integrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\log(x)\log^2(\log(x))}\,\frac{dx}{x}.$$

Soluzione. Si tratta di integrare una funzione nonnegativa e effettuando la sostituzione $t = \log(x)$ si ottiene

$$\int_3^b \frac{1}{\log(x)\log^2(\log(x))}\,\frac{dx}{x} = \int_{\log(3)}^{\log(b)} \frac{1}{t\log^2(t)}\,dt = -\frac{1}{\log(t)}\Big|_{\log(3)}^{\log(b)}$$

da cui

$$\lim_{b\to+\infty}\int_3^b \frac{1}{\log(x)\log^2(\log(x))}\,\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{\log(\log(b))} + \frac{1}{\log(\log(3))} = \frac{1}{\log(\log(3))}.$$

4. Dimostrare che

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2},$$

e dedurne

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6(x)\,dx = \frac{5\pi}{16}.$$

CODICE=055165

Si può determinare una formula esplicita per

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2m}(x)\,dx \qquad m \in \mathbb{N}?$$

Soluzione. Il primo integrale si calcola facilmente integrando per parti

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\,\cos(x)\,dx &= \cos(x)\sin(x)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sin^2(x)\,dx \\ &= 0 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 - \cos^2(x)\,dx \\ &= \pi - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx,\end{aligned}$$

da cui

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

In generale si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2m}(x)\,dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2m-1}(x)\,\cos(x)\,dx \\ &= \cos(x)^{2m-1}\sin(x)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + (2m-1)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2m-2}\sin^2(x)\,dx \\ &= 0 + (2m-1)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2m-2}(1-\cos^2(x))\,dx \\ &= (2m-1)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2m-2}(x) - \cos^{2m}(x)\,dx,\end{aligned}$$

da cui si ricava $(1+2m-1)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2m}(x)\,dx = (2m-1)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2m-2}(x)\,dx$ e quindi la formula di ricorrenza

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2m}(x)\,dx = \frac{2m-1}{2m}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2m-2}(x)\,dx.$$

Da questa si ricava

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6(x)\,dx = \frac{5}{6}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4(x)\,dx = \frac{5}{6}\frac{3}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx = \frac{5\pi}{16}.$$

e in generale

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2m}(x)\,dx = \frac{2m-1}{2m}\frac{2m-3}{2m-2}\frac{2m-5}{2m-4}\cdots\frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\,\pi.$$

CODICE=055165