Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 luglio 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=470191

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 luglio 2019

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=470191

PARTE A

1. Dato $b > 0$, la funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x^2 - b^3|$ è derivabile per

   A: $x \neq 0$ B: N.A. C: $x > 0$ D: $x \neq \pm 1$ E: $x \in \mathbb{R}$

2. La funzione $f(x) = x\tan(x)$ definita per $-\pi/2 < x < \pi/2$ è

   A: N.A. B: limitata superiormente C: crescente D: limitata inferiormente E: monotona

3. Dato $x \geq 0$, la serie a termini non-negativi

   $$\sum_{n=1}^{\infty} 7^n \left(\frac{x}{4x+1}\right)^n$$

   converge per

   A: $0 \leq x < 1/3$ B: $0 \leq x \leq 1/3$ C: N.A. D: $1 < x$ E: $x > 0$

4. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = x^4 e^{x^5}$ è

   A: $\frac{1}{\cos(x)}$ B: e^{x^4} C: $2(e^x - e^{-x})$ D: N.A. E: $\frac{e^{x^5}}{5} + e^{\tan(\pi/12)}$

5. Modulo e argomento del numero complesso $z = \big(1+i\big)^{-4}$ sono

   A: $(-1/4, -\pi)$ B: $(4, 3\pi/4)$ C: $(1/2\sqrt{2}, \pi/2)$ D: N.A. E: $(1/4, \pi)$

6. L'integrale

   $$\int_0^{\pi/4} t\,\cos(2t)\,dt$$

   vale

   A: $\pi - 1/4$ B: $\pi/4 - 1/2$ C: $-1/2$ D: 0 E: N.A.

7. Data $f(x) = x^{\tan(x)}$. Allora $f'(\pi/4)$ è uguale a

   A: $\frac{1}{4}\pi\left(\frac{4}{\pi} + 2\log\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ B: 0 C: $\pi/2$ D: $-\pi/2$ E: N.A.

8. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A = \{x \in \mathbb{R} :\ e^{x^3} < 2\}$$

   valgono

   A: $\{-\infty, N.E., \sqrt[3]{\log(2)}, N.E.\}$ B: $\{-\sqrt[3]{\log(2)}, N.E., \sqrt[3]{\log(2)}, N.E.\}$ C: $\{0, 0, \sqrt{\log(2)}, 1\}$
   D: N.A. E: $\{0, 0, \sqrt{\log(2)}, N.E.\}$

9. Il limite

   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1}{x\log(x)}$$

   vale

   A: N.E. B: $-1/2$ C: 0 D: N.A. E: $+\infty$

10. La retta tangente al grafico di $y(x) = x^2\sin(1/x)$, se $x \neq 0$, $y(0) = 0$ nel punto $x_0 = 0$ vale

    A: N.A. B: $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ C: $1 + x$ D: $-\pi x$ E: 1

CODICE=470191

CODICE=470191

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 luglio 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=003808

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 luglio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=003808

PARTE A

1. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = x^4 e^{x^5}$ è

   A: $\frac{1}{\cos(x)}$ B: e^{x^4} C: $2(e^x - e^{-x})$ D: $\frac{e^{x^5}}{5} + e^{\tan(\pi/12)}$ E: N.A.

2. Dato $x \geq 0$, la serie a termini non-negativi

$$\sum_{n=1}^{\infty} 7^n \left(\frac{x}{4x+1}\right)^n$$

   converge per

   A: $0 \leq x \leq 1/3$ B: N.A. C: $1 < x$ D: $x > 0$ E: $0 \leq x < 1/3$

3. Il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1}{x \log(x)}$$

   vale

   A: $+\infty$ B: N.E. C: N.A. D: 0 E: $-1/2$

4. L'integrale

$$\int_0^{\pi/4} t \cos(2t)\, dt$$

   vale

   A: $\pi/4 - 1/2$ B: 0 C: $\pi - 1/4$ D: N.A. E: $-1/2$

5. Dato $b > 0$, la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x^2 - b^3|$ è derivabile per

   A: $x \in \mathbb{R}$ B: $x > 0$ C: $x \neq \pm 1$ D: N.A. E: $x \neq 0$

6. La funzione $f(x) = x \tan(x)$ definita per $-\pi/2 < x < \pi/2$ è

   A: limitata inferiormente B: crescente C: N.A. D: limitata superiormente E: monotona

7. Data $f(x) = x^{\tan(x)}$. Allora $f'(\pi/4)$ è uguale a

   A: 0 B: $-\pi/2$ C: $\pi/2$ D: N.A. E: $\frac{1}{4}\pi\left(\frac{4}{\pi} + 2\log\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

8. La retta tangente al grafico di $y(x) = x^2 \sin(1/x)$, se $x \neq 0$, $y(0) = 0$ nel punto $x_0 = 0$ vale

   A: $1 + x$ B: $-\pi x$ C: 1 D: $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ E: N.A.

9. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \; e^{x^3} < 2\}$$

   valgono

   A: $\{0, 0, \sqrt{\log(2)}, 1\}$ B: $\{0, 0, \sqrt{\log(2)}, N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., \sqrt[3]{\log(2)}, N.E.\}$ D: $\{-\sqrt[3]{\log(2)}, N.E., \sqrt[3]{\log(2)}, N.E.\}$
   E: N.A.

10. Modulo e argomento del numero complesso $z = \big(1 + i\big)^{-4}$ sono

    A: $(-1/4, -\pi)$ B: $(1/2\sqrt{2}, \pi/2)$ C: N.A. D: $(1/4, \pi)$ E: $(4, 3\pi/4)$

CODICE=003808

CODICE=003808

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 luglio 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=095961

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 luglio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=095961

PARTE A

1. Dato $b > 0$, la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x^2 - b^3|$ è derivabile per

   A: $x \neq 0$ B: N.A. C: $x \in \mathbb{R}$ D: $x > 0$ E: $x \neq \pm 1$

2. Il limite
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1}{x \log(x)}$$
   vale

   A: N.E. B: $-1/2$ C: $+\infty$ D: 0 E: N.A.

3. Data $f(x) = x^{\tan(x)}$. Allora $f'(\pi/4)$ è uguale a

   A: N.A. B: $-\pi/2$ C: $\frac{1}{4}\pi\left(\frac{4}{\pi} + 2\log\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ D: $\pi/2$ E: 0

4. La retta tangente al grafico di $y(x) = x^2 \sin(1/x)$, se $x \neq 0$, $y(0) = 0$ nel punto $x_0 = 0$ vale

   A: N.A. B: $1 + x$ C: $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ D: 1 E: $-\pi x$

5. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = x^4 e^{x^5}$ è

   A: $\frac{e^{x^5}}{5} + e^{\tan(\pi/12)}$ B: e^{x^4} C: N.A. D: $2(e^x - e^{-x})$ E: $\frac{1}{\cos(x)}$

6. La funzione $f(x) = x\tan(x)$ definita per $-\pi/2 < x < \pi/2$ è

   A: monotona B: N.A. C: limitata superiormente D: crescente E: limitata inferiormente

7. L'integrale
$$\int_0^{\pi/4} t\,\cos(2t)\,dt$$
   vale

   A: $\pi - 1/4$ B: N.A. C: $-1/2$ D: 0 E: $\pi/4 - 1/2$

8. Modulo e argomento del numero complesso $z = \big(1 + i\big)^{-4}$ sono

   A: $(1/4, \pi)$ B: $(4, 3\pi/4)$ C: $(-1/4, -\pi)$ D: N.A. E: $(1/2\sqrt{2}, \pi/2)$

9. Dato $x \geq 0$, la serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=1}^{\infty} 7^n \left(\frac{x}{4x+1}\right)^n$$
   converge per

   A: $0 \leq x < 1/3$ B: $1 < x$ C: $x > 0$ D: N.A. E: $0 \leq x \leq 1/3$

10. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} :\ e^{x^3} < 2\}$$
    valgono

    A: $\{0, 0, \sqrt{\log(2)}, 1\}$ B: $\{-\sqrt[3]{\log(2)}, N.E., \sqrt[3]{\log(2)}, N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., \sqrt[3]{\log(2)}, N.E.\}$
    D: N.A. E: $\{0, 0, \sqrt{\log(2)}, N.E.\}$

CODICE=095961

CODICE=095961

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 luglio 2019

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=050105

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 luglio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=050105

PARTE A

1. La retta tangente al grafico di $y(x) = x^2 \sin(1/x)$, se $x \neq 0$, $y(0) = 0$ nel punto $x_0 = 0$ vale

   A: $-\pi x$ B: N.A. C: $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ D: 1 E: $1 + x$

2. Dato $b > 0$, la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x^2 - b^3|$ è derivabile per

   A: $x > 0$ B: N.A. C: $x \neq \pm 1$ D: $x \neq 0$ E: $x \in \mathbb{R}$

3. Data $f(x) = x^{\tan(x)}$. Allora $f'(\pi/4)$ è uguale a

   A: $-\pi/2$ B: $\frac{1}{4}\pi\left(\frac{4}{\pi} + 2\log\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ C: N.A. D: $\pi/2$ E: 0

4. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A = \{x \in \mathbb{R} : \ e^{x^3} < 2\}$$

   valgono

   A: $\{0, 0, \sqrt{\log(2)}, N.E.\}$ B: $\{-\sqrt[3]{\log(2)}, N.E., \sqrt[3]{\log(2)}, N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., \sqrt[3]{\log(2)}, N.E.\}$
   D: N.A. E: $\{0, 0, \sqrt{\log(2)}, 1\}$

5. L'integrale

   $$\int_0^{\pi/4} t\, \cos(2t)\, dt$$

   vale

   A: 0 B: $\pi - 1/4$ C: $-1/2$ D: $\pi/4 - 1/2$ E: N.A.

6. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = x^4 e^{x^5}$ è

   A: e^{x^4} B: N.A. C: $\frac{1}{\cos(x)}$ D: $\frac{e^{x^5}}{5} + e^{\tan(\pi/12)}$ E: $2(e^x - e^{-x})$

7. La funzione $f(x) = x\tan(x)$ definita per $-\pi/2 < x < \pi/2$ è

   A: limitata superiormente B: crescente C: monotona D: limitata inferiormente E: N.A.

8. Dato $x \geq 0$, la serie a termini non-negativi

   $$\sum_{n=1}^{\infty} 7^n \left(\frac{x}{4x+1}\right)^n$$

   converge per

   A: N.A. B: $0 \leq x < 1/3$ C: $1 < x$ D: $x > 0$ E: $0 \leq x \leq 1/3$

9. Modulo e argomento del numero complesso $z = \big(1 + i\big)^{-4}$ sono

   A: N.A. B: $(1/2\sqrt{2}, \pi/2)$ C: $(1/4, \pi)$ D: $(-1/4, -\pi)$ E: $(4, 3\pi/4)$

10. Il limite

    $$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1}{x \log(x)}$$

    vale

    A: $+\infty$ B: N.E. C: 0 D: $-1/2$ E: N.A.

CODICE=050105

CODICE=050105

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 luglio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	○	○	●	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	●	○	○	○	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	●	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=470191

CODICE=470191

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 luglio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	●	○
4	○	○	○	●	○
5	○	○	○	●	○
6	●	○	○	○	○
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	○	●
9	○	○	●	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=003808

CODICE=003808

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 luglio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	○	○	●	○
3	○	○	●	○	○
4	●	○	○	○	○
5	●	○	○	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	●	○	○	○
8	●	○	○	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=095961

CODICE=095961

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 luglio 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	●	○	○	○
4	○	○	●	○	○
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	●	○
7	○	○	○	●	○
8	○	●	○	○	○
9	○	○	●	○	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=050105

CODICE=050105

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 luglio 2019

PARTE B

1. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = x^{\log(x)} \qquad x > 0,$$

e in particolare trovare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo e assoluto e quelli di flesso.

Soluzione. Iniziamo intanto a studiare il comportamento agli estremi del dominio, riscrivendo la funzione come

$$f(x) = \mathrm{e}^{\log^2(x)} \qquad x > 0,$$

da cui si ricava immediatamente che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre, la funzione f è sempre strettamente positiva.

Calcolando la derivata prima si ottiene

$$f'(x) = 2x^{\log(x)-1}\log(x) \qquad x > 0,$$

e, dato che $x^{\log(x)-1} = \frac{\mathrm{e}^{\log^2(x)}}{x} > 0$ il segno di f' è determinato solo dal segno del logaritmo. Si ha quindi che $f' < 0$ per $0 < x < 1$ e $f' > 0$ per $x > 1$. Il punto $x = 1$ risulta quindi di minimo assoluto e non esistono punti di massimo relativo o assoluto. Il minimo assoluto vale quindi $f(1) = 1$.

Pasando alla derivata seconda si ha

$$f''(x) = 2x^{\log(x)-2}\left(2\log^2(x) - \log(x) + 1\right) \qquad x > 0.$$

Il termine $2x^{\log(x)-2}$ è sempre positivo, mentre per studiare il segno del termine $(2\log^2(x) - \log(x) + 1$ osserviamo che ponendo $t = \log(x)$ ci riconduciamo a studiare il segno della funzione biquadratica $\phi(t) = 2t^2 - t + 1$, il cui determinante è $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$. Il segno risulta essere quindi costante e ponendo per esempio $x = 1$ si determina che

$$f''(x) > 0 \qquad \forall\, x > 0,$$

quindi la funzione f risulta strettamente convessa e non ha punti di flesso.

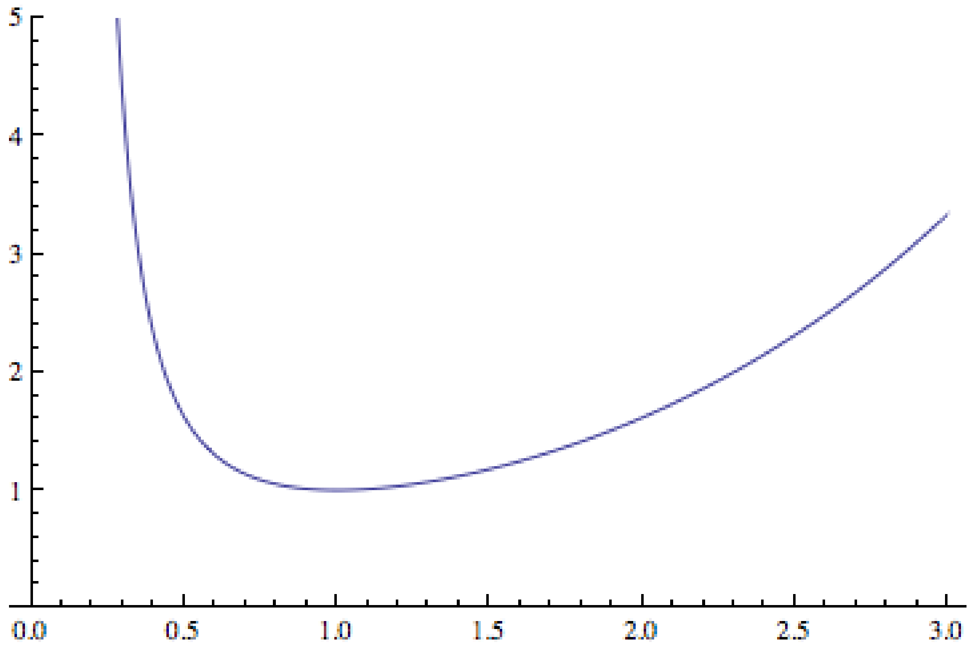

Figura 1: Grafico approssmativo di $f(x) = x^{\log(x)}$

2. Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \log(x)\mathrm{e}^{-y(x)} \\ y(3) = \log(3) + \log(\log(3)). \end{cases}$$

Soluzione. Si tratta di una equazione a variabili separabili e per risolverla basta portarla nella forma

$$\int \mathrm{e}^y dy = \int \log(x)\, dx,$$

da cui

$$e^y(x) = x\log(x) - x + c,$$

e quindi

$$y(x) = \log(x\log(x) - x + c),$$

se la costante c è tale che $x\log(x) - x + c > 0$.

Imponendo la condizione iniziale si ha

$$y(3) = \log(3) + \log(\log(3)) = \log(3\log(3) - 3 + c).$$

Passando agli esponenziali si ha $3\log(3) - 3 + c = \mathrm{e}^{\log(3)}\mathrm{e}^{\log(\log(3))} = 3\log(3)$, da cui $c = 3$ e la soluzione è

$$y(x) = \log(x\log(x) - x + 3),$$

che risulta essere definita per $x > 0$.

3. Studiare, la convergenza ed eventualmente calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}(x + 4x^3)\, dx.$$

Soluzione. Si tratta dell'integrale di una funzione continua e non negative su tutto $\mathbb{R}^+$ e pertanto l'unico problema è la convergenza all'infinito. In tal caso osserviamo che dato che, per $x \to +\infty$, la funzione e^{x^2} diverge più rapidamente di ogni potenza di x (in particolare di x^4) e si ha che

$$\mathrm{e}^{-x^2}(x+4x^3) = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad \text{per } x \to +\infty,$$

da cui la convergenza dell'integrale tramite in teorema del confronto.

Per calcolare effettivamente l'integrale dobbiamo studiamo il limite per $b \to +\infty$ di

$$\int_0^b \mathrm{e}^{-x^2}(x+4x^3)\,dx = \int_0^b x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx + 4\int_0^b x\,\mathrm{e}^{-x^2}x^2\,dx.$$

Tramite le formule di sostituzione e di integrazione per parti si ottiene

$$\int_0^b x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx + 4\int_0^b x\mathrm{e}^{-x^2}x^2\,dx = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^b - 2e^{-x^2}\left(x^2+1\right)\Big|_0^b,$$

da cui

$$\int_0^b \mathrm{e}^{-x^2}(x+4x^3)\,dx = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\left(4b^2+5\right)e^{-b^2}.$$

Mandando b all'infinito, tramite l'uso dei limiti notevoli, si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}(x+4x^3)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-x^2}(x+4x^3)\,dx = \frac{5}{2}.$$

4. Siano f, g continue e derivabili in $[a,b]$ e tali che valga una delle due

   (a) $f(a) \geq g(a)$ e $f'(x) \geq g'(x)$ per ogni $x \in [a,b]$;

   (b) $f(b) \geq g(b)$ e $f'(x) \leq g'(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

   Allora si ha $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

   Soluzione. Dimostriamo il primo caso. Definendo $h(x) = f(x) - g(x)$ si ha che $h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$, quindi h è monotona crescente e quindi è maggiore o uguale del valore nell'estremo sinistro dell'intervallo

   $$h(x) \geq h(a) = f(a) - g(a) \geq 0,$$

   da cui $f(x) - g(x) = h(x) \geq 0$, che è la tesi.

   Nel secondo caso si ha $h'(x) \leq 0$, e quindi h è decrescente e pertanto maggiore o uguale del valore nell'estremo destro dell'intervallo $h(x) \geq h(b) = f(b) - g(b) \geq 0$. Anche in questo caso si conclude che $f(x) \geq g(x)$.