

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

15 febbraio 2018

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=682238

PARTE A

1. Data $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1} - \log(2x-3)$. Allora $f'(2)$ è uguale a

A: N.A. B: 1 C: 2π D: 0 E: $-\frac{31}{9}$

2. L'integrale

$$\int_0^{-1} \arctan(x) dx$$

vale

A: 1 B: N.A. C: $\frac{\pi - \log(4)}{4}$ D: $\pi/2$ E: 0

3. La serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin(n)}{n^2} (x-1)^n$$

converge per

A: $x \in [0, 2]$ B: $x \in]-2, 2[$ C: $x \in [0, 2[$ D: N.A. E: $|x| < 1$

4. L'integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx$$

converge per a

A: $a > 1$ B: $a \in [2, 5]$ C: $a < 1$ D: $a \in]1, 4[$ E: N.A.

5. Il polinomio di Taylor di $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ di grado 3, relativo al punto $x_0 = 0$ vale

A: $x + \frac{x^3}{3!}$ B: x^3 C: $x + (\frac{x}{2})^3$ D: $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}$ E: N.A.

6. La funzione $f : [1, \pi^4] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^7 - x$ è

A: concava B: iniettiva C: non continua D: N.A. E: surgettiva

7. Sia y soluzione del problema di Cauchy $y(t)y'(t) = \sin(t)$, $y(0) = 1$. Allora $y(\pi/3)$ vale

A: $\sin(1)$ B: $\sqrt{2 - \pi/3}$ C: $\pi/3$ D: 0 E: N.A.

8. L'argomento delle soluzioni di

$$z^2 + 3iz + 4 = 0$$

è

A: $(\pi/3, \pi/6)$ B: $(0, \pi/2)$ C: $(\pi/2, -\pi/2)$ D: $(0, \pi)$ E: N.A.

9. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$$

vale

A: 1 B: e C: N.E. D: N.A. E: e^2

10. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \tan(n^2/4) < 1\},$$

valgono

A: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$ D: $\{-1, -1, 1, 1\}$ E: $\{0, 0, 1, 1\}$

CODICE=682238

CODICE=682238

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

15 febbraio 2018

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=205790

PARTE A

1. La serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin(n)}{n^2} (x-1)^n$$

converge per

A: N.A. B: $|x| < 1$ C: $x \in [0, 2[$ D: $x \in [0, 2]$ E: $x \in]-2, 2[$

2. L'integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 - 1}} dx$$

converge per a

A: $a \in]1, 4[$ B: $a > 1$ C: N.A. D: $a \in [2, 5]$ E: $a < 1$

3. Sia y soluzione del problema di Cauchy $y(t)y'(t) = \sin(t)$, $y(0) = 1$. Allora $y(\pi/3)$ vale

A: $\pi/3$ B: 0 C: $\sqrt{2 - \pi/3}$ D: N.A. E: $\sin(1)$

4. Data $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1} - \log(2x-3)$. Allora $f'(2)$ è uguale a

A: 1 B: 0 C: N.A. D: 2π E: $-\frac{31}{9}$

5. Il polinomio di Taylor di $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ di grado 3, relativo al punto $x_0 = 0$ vale

A: $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}$ B: N.A. C: $x + \frac{x^3}{3!}$ D: x^3 E: $x + (\frac{x}{2})^3$

6. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \tan(n^2/4) < 1\},$$

valgono

A: $\{0, 0, 1, 1\}$ B: N.A. C: $\{-1, -1, 1, 1\}$ D: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$ E: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$

7. La funzione $f : [1, \pi^4] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^7 - x$ è

A: iniettiva B: non continua C: N.A. D: concava E: surgettiva

8. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$$

vale

A: N.E. B: N.A. C: e D: e^2 E: 1

9. L'argomento delle soluzioni di

$$z^2 + 3iz + 4 = 0$$

è

A: $(0, \pi)$ B: $(\pi/2, -\pi/2)$ C: $(\pi/3, \pi/6)$ D: $(0, \pi/2)$ E: N.A.

10. L'integrale

$$\int_0^{-1} \arctan(x) dx$$

vale

A: 0 B: $\frac{\pi - \log(4)}{4}$ C: 1 D: $\pi/2$ E: N.A.

CODICE=205790

CODICE=205790

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

15 febbraio 2018

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=846370

PARTE A

1. L'integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4-1}} dx$$

converge per a

A: $a > 1$ B: N.A. C: $a \in [2, 5]$ D: $a < 1$ E: $a \in]1, 4[$

2. Il polinomio di Taylor di $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ di grado 3, relativo al punto $x_0 = 0$ vale

A: $x + (\frac{x}{2})^3$ B: x^3 C: $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}$ D: $x + \frac{x^3}{3!}$ E: N.A.

3. Data $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1} - \log(2x-3)$. Allora $f'(2)$ è uguale a

A: 1 B: N.A. C: $-\frac{31}{9}$ D: 2π E: 0

4. La serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin(n)}{n^2} (x-1)^n$$

converge per

A: $|x| < 1$ B: $x \in]-2, 2[$ C: $x \in [0, 2]$ D: N.A. E: $x \in [0, 2[$

5. La funzione $f: [1, \pi^4] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^7 - x$ è

A: N.A. B: iniettiva C: concava D: non continua E: surgettiva

6. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \tan(n^2/4) < 1\},$$

valgono

A: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$ B: $\{0, 0, 1, 1\}$ C: N.A. D: $\{-1, -1, 1, 1\}$ E: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$

7. L'integrale

$$\int_0^{-1} \arctan(x) dx$$

vale

A: 1 B: 0 C: N.A. D: $\pi/2$ E: $\frac{\pi - \log(4)}{4}$

8. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$$

vale

A: e B: N.A. C: e^2 D: 1 E: N.E.

9. Sia y soluzione del problema di Cauchy $y(t)y'(t) = \sin(t)$, $y(0) = 1$. Allora $y(\pi/3)$ vale

A: N.A. B: $\sin(1)$ C: $\sqrt{2 - \pi/3}$ D: 0 E: $\pi/3$

10. L'argomento delle soluzioni di

$$z^2 + 3iz + 4 = 0$$

è

A: $(0, \pi)$ B: N.A. C: $(\pi/2, -\pi/2)$ D: $(\pi/3, \pi/6)$ E: $(0, \pi/2)$

CODICE=846370

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

15 febbraio 2018

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=441390

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \tan(n^2/4) < 1\},$$

valgono

$$A: \{1, 1, +\infty, N.E.\} \quad B: \{-1, N.E., 1, N.E.\} \quad C: \{0, 0, 1, 1\} \quad D: \{-1, -1, 1, 1\} \quad E: N.A.$$

2. Sia y soluzione del problema di Cauchy $y(t)y'(t) = \sin(t)$, $y(0) = 1$. Allora $y(\pi/3)$ vale

$$A: 0 \quad B: \sin(1) \quad C: \sqrt{2 - \pi/3} \quad D: N.A. \quad E: \pi/3$$

3. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$$

vale

$$A: e \quad B: N.E. \quad C: 1 \quad D: e^2 \quad E: N.A.$$

4. Il polinomio di Taylor di $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ di grado 3, relativo al punto $x_0 = 0$ vale

$$A: x + \left(\frac{x}{2}\right)^3 \quad B: x + \frac{x^3}{3!} \quad C: N.A. \quad D: 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} \quad E: x^3$$

5. La funzione $f: [1, \pi^4] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^7 - x$ è

$$A: N.A. \quad B: \text{non continua} \quad C: \text{iniettiva} \quad D: \text{surgettiva} \quad E: \text{concava}$$

6. L'argomento delle soluzioni di

$$z^2 + 3iz + 4 = 0$$

è

$$A: (\pi/3, \pi/6) \quad B: (0, \pi/2) \quad C: (\pi/2, -\pi/2) \quad D: N.A. \quad E: (0, \pi)$$

7. L'integrale

$$\int_0^{-1} \arctan(x) dx$$

vale

$$A: \frac{\pi - \log(4)}{4} \quad B: 0 \quad C: 1 \quad D: N.A. \quad E: \pi/2$$

8. Data $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1} - \log(2x-3)$. Allora $f'(2)$ è uguale a

$$A: 1 \quad B: -\frac{31}{9} \quad C: N.A. \quad D: 2\pi \quad E: 0$$

9. La serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin(n)}{n^2} (x-1)^n$$

converge per

$$A: x \in [0, 2] \quad B: x \in]-2, 2[\quad C: N.A. \quad D: x \in [0, 2[\quad E: |x| < 1$$

10. L'integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4-1}} dx$$

converge per a

$$A: a < 1 \quad B: N.A. \quad C: a \in [2, 5] \quad D: a \in]1, 4[\quad E: a > 1$$

CODICE=441390

CODICE=682238

CODICE=205790

CODICE=846370

CODICE=441390

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

15 febbraio 2018

PARTE B

1. Si studi per $\lambda > 0$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{\lambda}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e in particolare se ne determinino gli intervalli di convessità.

Soluzione. La funzione $f(x)$ è strettamente positiva per $x > 0$ e strettamente negativa per $x < 0$. Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} x e^{-\frac{\lambda}{x^2}} = 0$$

da cui deduciamo che la funzione f è continua su tutto \mathbb{R} . Calcolando i limiti agli estremi del dominio troviamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = +1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)/x = +1,$$

quindi la funzione ha asintoti obliqui per $x \rightarrow \pm\infty$. Derivando la funzione una volta si ottiene, per $x \neq 0$,

$$f'(x) = e^{-\frac{\lambda}{x^2}} (1 + 2\lambda x^{-2}),$$

che è sempre positiva. Si verifica anche facilmente che $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$, da cui segue la continuità della derivata prima in 0. Derivando la funzione due volte troviamo, per $x \neq 0$,

$$f''(x) = \frac{2\lambda e^{-\frac{\lambda}{x^2}} (2\lambda - x^2)}{x^5}$$

La derivata seconda si annulla per $x = \pm\sqrt{2\lambda}$, è positiva per $x < -\sqrt{2\lambda}$ e per $0 < x < \sqrt{2\lambda}$, intervalli ove la funzione è convessa. Altrove è concava. Abbiamo quindi tre punti di flesso in $x_1 = -\sqrt{2\lambda}$, in $x_2 = 0$ e in $x_3 = \sqrt{2\lambda}$.

2. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 4x^3 y(x) = x e^{-x^4} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

CODICE=441390

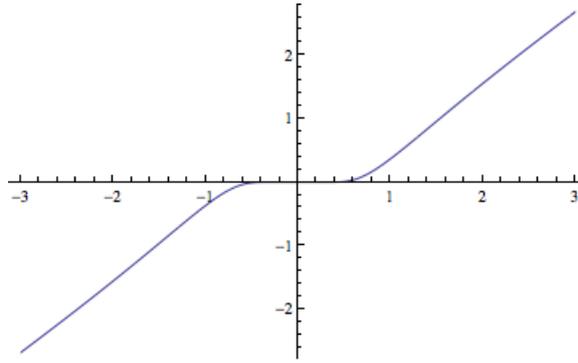


Figura 1: Grafico approssimativo di $f(x)$

per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$.

Si determini poi se esistono y_0 tali che la soluzione $y(x)$ corrispondente al dato iniziale y_0 è tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$$

Soluzione. L'equazione differenziale si può risolvere con il metodo del fattore integrante. Infatti se moltiplichiamo a sinistra e a destra dell'equazione per e^{x^4} troviamo

$$(e^{x^4} y(x))' = x.$$

Integrando a sinistra e destra e tenendo conto della condizione iniziale $y(0) = y_0$ otteniamo

$$y(x) = e^{-x^4} \left(\int_0^x t \, dt + y_0 \right)$$

ovvero

$$y(x) = e^{-x^4} \left(\frac{x^2}{2} + y_0 \right).$$

Per ogni scelta di $y_0 \in \mathbb{R}$ vale $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

3. Studiare, al variare di $\alpha > 0$ la convergenza dell'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\cosh(\alpha x)} \, dx$$

e chiamato $\Phi(\alpha) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\cosh(\alpha x)} \, dx$, dove è definita, studiare

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \Phi(\alpha)$$

Soluzione. Ricordiamo che

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

e quindi

$$\frac{1}{\cosh(\alpha x)} = \frac{2}{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}.$$

Vogliamo verificare che gli integrali $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\cosh(\alpha x)} \, dx$ e $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(\alpha x)} \, dx$ convergono per ogni $\alpha > 0$. Osserviamo che $\frac{1}{\cosh(\alpha x)}$ è una funzione limitata ed integrabile su ogni intervallo del tipo $[0, c]$ con $c \in \mathbb{R}$ costante positiva arbitraria. Ci interessa quindi studiare il comportamento per $x \rightarrow +\infty$. In virtù della formula scritta sopra abbiamo per $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{\cosh(\alpha x)} \sim \frac{2}{e^{\alpha x}}$$

ed in particolare possiamo dire per ogni α esiste $c_\alpha > 0$ tale che se $x > c_\alpha$ allora

$$\frac{1}{\cosh(\alpha x)} \sim \frac{2}{e^{\alpha x}} < \frac{2}{x^2}.$$

Riassumendo, per ogni $\alpha > 0$ possiamo scrivere

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(\alpha x)} dx = \int_0^{c_\alpha} \frac{1}{\cosh(\alpha x)} dx + \int_{c_\alpha}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(\alpha x)} dx$$

ove il primo integrale converge perché integriamo una funzione limitata su un intervallo limitato, mentre il secondo integrale converge perché maggiorato dall'integrale convergente $\int_{c_\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$. Infine, siccome $\cosh(\alpha x)$ è una funzione pari, abbiamo

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\cosh(\alpha x)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(\alpha x)} dx$$

quindi anche l'integrale su $(-\infty, 0)$ converge. Usando che

$$\frac{1}{\cosh(\alpha x)} = \frac{2e^{\alpha x}}{e^{2\alpha x} + 1},$$

calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(\alpha x)} dx &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{1}{\cosh(\alpha x)} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{2e^{\alpha x}}{e^{2\alpha x} + 1} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{2}{\alpha} \int_1^{e^{\alpha a}} \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{2}{\alpha} [\arctan(t)]_1^{e^{\alpha a}} \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{2}{\alpha} [\arctan(e^{\alpha a}) - \pi/4] = \frac{\pi}{2\alpha}. \end{aligned}$$

Allora

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\cosh(\alpha x)} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(\alpha x)} dx = \frac{\pi}{\alpha},$$

e

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \Phi(\alpha) = +\infty.$$

4. Sia $f(x)$ una funzione continua e con derivata continua e che si annulla per $x = 0, 1$. Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) \sin(nx) dx = 0.$$

Cosa si può dire invece di

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) \cos(nx) dx?$$

Soluzione. Integrando per parti si ha

$$\int_0^1 f(x) \sin(nx) dx = -\frac{1}{n} f(x) \cos(nx) \Big|_0^1 + \frac{1}{n} \int_0^1 f'(x) \cos(nx) dx$$

Il termine finito si annulla dato che $f(0) = f(1) = 0$, mentre l'integrale converge a zero, dato che f' è limitata e quindi

$$\left| \frac{1}{n} \int_0^1 f'(x) \cos(nx) dx \right| \leq \frac{1}{n} \max_{[0,1]} |f'(x)| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Con lo stesso ragionamento si ha anche

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) \cos(nx) dx = 0.$$