Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2017

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=712394

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=712394

PARTE A

1. La funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{|x|}$ è
   A: derivabile ovunque B: iniettiva C: surgettiva D: convessa E: invertibile per $x \in [-2,-1]$

2. Data $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{\cos(x)}}$. Allora $f'(\frac{\pi}{2})$ è uguale a
   A: $\sqrt{e}$ B: N.A. C: $-\frac{1}{2}$ D: 1 E: $\frac{1}{2}$

3. Per $t > 0$ le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = te^t$ sono
   A: N.A. B: $t^2 e^{t^2} + c$ C: $e^t(t-1) + c$ D: $t\log(t) + c$ E: N.E.

4. Inf, min, sup e max dell'insieme
   $$A = \{x^2 : x \in B\},\ \text{dove } B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^2\}$$
   valgono
   A: N.A. B: $\{-\infty, N.E., 2, 2\}$ C: $\{0, N.E., 4, 4\}$ D: $\{0, 0, 4, N.E.\}$ E: $\{-1, N.E., 2, N.E.\}$

5. Il limite
   $$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2+2\right)\left(\log\left(x^2+1\right) - \log x^2\right)$$
   vale
   A: $+\infty$ B: N.A. C: N.E. D: 0 E: 1

6. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,\pi}{3.1415} & \text{per } x < 0 \\ \sin(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$
   A: è derivabile, ma non continua. B: N.A. C: non è né continua né derivabile. D: è continua e derivabile. E: è continua, ma non derivabile.

7. Dato $\alpha \geq 0$, la serie a termini non-negativi
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n}{n^{\mathrm{e}}}$$
   converge per
   A: $\alpha > 0$ B: $0 < \alpha < 1$ C: $\alpha \geq \mathrm{e}$ D: $\alpha > \pi$ E: N.A.

8. L'integrale
   $$\int_{-1}^{1} |1-x|^2\, dx$$
   vale
   A: 0 B: 3/2 C: 5/2 D: N.A. E: 5/3

9. Il polinomio di Taylor di ordine 1 per $f(x) = \cos^2(3x)$ nel punto $x_0 = \frac{\pi}{18}$ vale
   A: $-3\left(x - \frac{\pi}{18}\right)$ B: $\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{18}\right)$ C: $\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) - \left(x - \frac{\pi}{18}\right)\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ D: $3x + \frac{\pi}{18}$ E: N.A.

10. Dati i numeri complessi $z = 2 + i$ e $w = 1 - 3i$, qual è il risultato di $\frac{z}{w}$?
    A: $(2+i)(3i+1)$ B: N.A. C: $\frac{5-2i}{\sqrt{10}}$ D: $\frac{5-2i}{10}$ E: $\frac{7i-1}{10}$

CODICE=712394

CODICE=712394

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2017

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=941181

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=941181

PARTE A

1. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+2\right)\left(\log\left(x^2+1\right)-\log x^2\right)$$
vale

A: N.E. B: 1 C: N.A. D: 0 E: $+\infty$

2. Dato $\alpha \geq 0$, la serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n}{n^{\mathrm{e}}}$$
converge per

A: N.A. B: $0<\alpha<1$ C: $\alpha>\pi$ D: $\alpha\geq \mathrm{e}$ E: $\alpha>0$

3. Per $t>0$ le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t)=te^t$ sono

A: $e^t(t-1)+c$ B: N.A. C: N.E. D: $t\log(t)+c$ E: $t^2e^{t^2}+c$

4. Il polinomio di Taylor di ordine 1 per $f(x)=\cos^2(3x)$ nel punto $x_0=\frac{\pi}{18}$ vale

A: $\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{18}\right)$ B: N.A. C: $-3\left(x-\frac{\pi}{18}\right)$ D: $\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)-\left(x-\frac{\pi}{18}\right)\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ E: $3x+\frac{\pi}{18}$

5. Dati i numeri complessi $z=2+i$ e $w=1-3i$, qual è il risultato di $\frac{z}{w}$?

A: $\frac{7i-1}{10}$ B: $\frac{5-2i}{\sqrt{10}}$ C: $(2+i)(3i+1)$ D: $\frac{5-2i}{10}$ E: N.A.

6. La funzione $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\sqrt{|x|}$ è

A: convessa B: surgettiva C: iniettiva D: derivabile ovunque E: invertibile per $x\in[-2,-1]$

7. L'integrale
$$\int_{-1}^{1}|1-x|^2\,dx$$
vale

A: N.A. B: 3/2 C: 5/3 D: 5/2 E: 0

8. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A=\{x^2: x\in B\},\ \text{dove } B=\{x\in\mathbb{R}: \frac{1}{\mathrm{e}}<\mathrm{e}^x<\mathrm{e}^2\}$$
valgono

A: $\{-1,N.E.,2,N.E.\}$ B: $\{0,0,4,N.E.\}$ C: N.A. D: $\{-\infty,N.E.,2,2\}$ E: $\{0,N.E.,4,4\}$

9. La funzione $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\,\pi}{3.1415} & \text{per } x<0\\ \sin(x) & \text{per } x\geq 0\end{cases}$

A: è derivabile, ma non continua. B: è continua, ma non derivabile. C: N.A. D: non è né continua né derivabile. E: è continua e derivabile.

10. Data $f(x)=\sqrt{\mathrm{e}^{\cos(x)}}$. Allora $f'(\frac{\pi}{2})$ è uguale a

A: $-\frac{1}{2}$ B: N.A. C: $\sqrt{e}$ D: 1 E: $\frac{1}{2}$

CODICE=941181

CODICE=941181

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2017

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=265578

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=265578

PARTE A

1. Data $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{\cos(x)}}$. Allora $f'(\frac{\pi}{2})$ è uguale a

   A: $\sqrt{e}$ B: N.A. C: $\frac{1}{2}$ D: $-\frac{1}{2}$ E: 1

2. Il polinomio di Taylor di ordine 1 per $f(x) = \cos^2(3x)$ nel punto $x_0 = \frac{\pi}{18}$ vale

   A: $\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{18}\right)$ B: $3x + \frac{\pi}{18}$ C: $\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) - \left(x - \frac{\pi}{18}\right)\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ D: N.A. E: $-3\left(x - \frac{\pi}{18}\right)$

3. Il limite

   $$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + 2\right)\left(\log\left(x^2 + 1\right) - \log x^2\right)$$

   vale

   A: N.A. B: N.E. C: $+\infty$ D: 0 E: 1

4. Per $t > 0$ le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = te^t$ sono

   A: N.E. B: $e^t\,(t - 1) + c$ C: $t\log(t) + c$ D: $t^2 e^{t^2} + c$ E: N.A.

5. L'integrale

   $$\int_{-1}^{1} |1 - x|^2 \, dx$$

   vale

   A: $3/2$ B: $5/3$ C: 0 D: $5/2$ E: N.A.

6. Dati i numeri complessi $z = 2 + i$ e $w = 1 - 3i$, qual è il risultato di $\frac{z}{w}$?

   A: N.A. B: $(2 + i)(3i + 1)$ C: $\frac{5-2i}{10}$ D: $\frac{7i-1}{10}$ E: $\frac{5-2i}{\sqrt{10}}$

7. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A = \{x^2 : x \in B\}, \text{ dove } B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^2\}$$

   valgono

   A: N.A. B: $\{0, N.E., 4, 4\}$ C: $\{-\infty, N.E., 2, 2\}$ D: $\{-1, N.E., 2, N.E.\}$ E: $\{0, 0, 4, N.E.\}$

8. Dato $\alpha \geq 0$, la serie a termini non-negativi

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n}{n^{\mathrm{e}}}$$

   converge per

   A: $\alpha > \pi$ B: $\alpha \geq \mathrm{e}$ C: $\alpha > 0$ D: $0 < \alpha < 1$ E: N.A.

9. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,\pi}{3.1415} & \text{per } x < 0 \\ \sin(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: N.A. B: è continua e derivabile. C: è continua, ma non derivabile. D: non è né continua né derivabile. E: è derivabile, ma non continua.

10. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{|x|}$ è

    A: derivabile ovunque B: convessa C: invertibile per $x \in [-2, -1]$ D: surgettiva E: iniettiva

CODICE=265578

CODICE=265578

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2017

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=890635

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=890635

PARTE A

1. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,\pi}{3.1415} & \text{per } x < 0 \\ \sin(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: è continua, ma non derivabile. B: non è né continua né derivabile. C: N.A. D: è derivabile, ma non continua. E: è continua e derivabile.

2. Il polinomio di Taylor di ordine 1 per $f(x) = \cos^2(3x)$ nel punto $x_0 = \frac{\pi}{18}$ vale

   A: N.A. B: $\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) - \left(x - \frac{\pi}{18}\right)\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ C: $3x + \frac{\pi}{18}$ D: $-3\left(x - \frac{\pi}{18}\right)$ E: $\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{18}\right)$

3. Data $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{\cos(x)}}$. Allora $f'(\frac{\pi}{2})$ è uguale a

   A: $-\frac{1}{2}$ B: $\sqrt{e}$ C: N.A. D: 1 E: $\frac{1}{2}$

4. La funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{|x|}$ è

   A: invertibile per $x \in [-2, -1]$ B: iniettiva C: convessa D: derivabile ovunque E: surgettiva

5. Dato $\alpha \geq 0$, la serie a termini non-negativi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n}{n^{\mathrm{e}}}$$

   converge per

   A: N.A. B: $\alpha > 0$ C: $0 < \alpha < 1$ D: $\alpha > \pi$ E: $\alpha \geq \mathrm{e}$

6. L'integrale

$$\int_{-1}^{1} |1 - x|^2\, dx$$

   vale

   A: 5/2 B: 0 C: N.A. D: 5/3 E: 3/2

7. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + 2\right)\left(\log\left(x^2 + 1\right) - \log x^2\right)$$

   vale

   A: 0 B: N.A. C: N.E. D: 1 E: $+\infty$

8. Per $t > 0$ le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = te^t$ sono

   A: $e^t\,(t - 1) + c$ B: $t^2 e^{t^2} + c$ C: N.E. D: $t\log(t) + c$ E: N.A.

9. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x^2 : x \in B\},\ \text{dove } B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^2\}$$

   valgono

   A: $\{0, 0, 4, N.E.\}$ B: $\{-\infty, N.E., 2, 2\}$ C: $\{0, N.E., 4, 4\}$ D: $\{-1, N.E., 2, N.E.\}$ E: N.A.

10. Dati i numeri complessi $z = 2 + i$ e $w = 1 - 3i$, qual è il risultato di $\frac{z}{w}$?

    A: $\frac{5-2i}{10}$ B: $\frac{5-2i}{\sqrt{10}}$ C: $(2 + i)(3i + 1)$ D: N.A. E: $\frac{7i-1}{10}$

CODICE=890635

CODICE=890635

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	●	○	○
3	○	○	●	○	○
4	○	○	○	●	○
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	●	○
9	○	●	○	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=712394

CODICE=712394

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	●	○	○	○	○
3	●	○	○	○	○
4	●	○	○	○	○
5	●	○	○	○	○
6	○	○	○	○	●
7	●	○	○	○	○
8	○	●	○	○	○
9	○	●	○	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=941181

CODICE=941181

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	●	○	○	○	○
3	○	○	○	○	●
4	○	●	○	○	○
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	●	○
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	○	●
9	○	○	●	○	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=265578

CODICE=265578

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	●	○	○	○	○
4	●	○	○	○	○
5	●	○	○	○	○
6	○	○	●	○	○
7	○	○	○	●	○
8	●	○	○	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=890635

CODICE=890635

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 giugno 2017

PARTE B

1. Data la funzione
$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 10x + 1}{x^2 + 1},$$
determinare il più grande intervallo contenente l'origine su cui f risulta invertibile. Calcolare inoltre, se possibile, la derivata della funzione inversa f^{-1} nel punto 1.

Soluzione Si ha
$$f'(x) = \frac{x^4 - 7x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}$$
e quindi $f'(0) = 10 > 0$. Allora il più grande intervallo contenente l'origine su cui f risulta invertibile è quello contenente l'origine in cui $f'(x) \geq 0$. Adesso $x^4 - 7x^2 + 10 \geq 0$ quando $x^2 \geq 5$ o $x^2 \leq 2$, quindi se $x \geq \sqrt{5}$, $x \leq -\sqrt{5}$ o $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Di questi l'unico intervallo che contiene l'origine è $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

Abbiamo che $f(0) = 1$ e $x = 0$ rientra nell'intervallo, quindi esiste la funzione inversa $f^{-1}(y)$ nel punto $y = 1$. Con la formula di derivazione della funzione inversa, ne possiamo calcolare la derivata. Abbiamo
$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{10}.$$

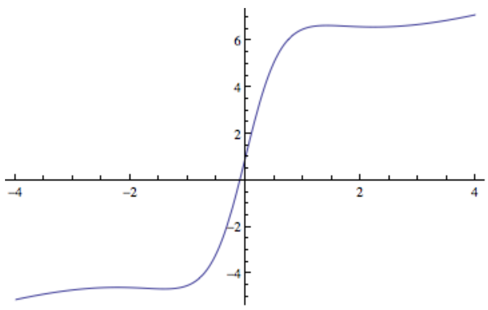

Figura 1: grafico approssimativo di $f(x)$

2. Risolvere per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y''(x) + \alpha^2 y(x) = x^2 \\ \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione Se $\alpha \neq 0$ le soluzioni dell'equazione omogenea sono date da

$$y_0(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$$

Per trovare la soluzione particolare, partiamo da un polinomio di secondo grado $y_1(x) = ax^2 + bx + c$ e vediamo che $a = \frac{1}{\alpha^2}$, $b = 0$, $c = -\frac{2}{\alpha^4}$, quindi la soluzione generale diventa

$$y(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) + \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^4}$$

e sostituendo le condizioni iniziali si ottiene $A = \frac{2}{\alpha^4}$ e $B = 0$. La soluzione dell'equazione differenziale per $\alpha \neq 0$ è

$$y(x) = \frac{2\cos(\alpha x) - 2}{\alpha^4} + \frac{x^2}{\alpha^2}$$

Per $\alpha = 0$, integrando semplicemente due volte, e imponendo le condizioni iniziali si ottiene immediatamente

$$y = \frac{x^4}{12}$$

3. Data la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t^2)}{t\sqrt{3-t}}\,dt$$

determinare l'insieme di definizione.

Soluzione Sicuramente per $x > 3$ la funzione F non è definita, per la presenza di $\sqrt{3-t}$ nell'integrale. I punti in cui l'integrando va controllato sono i due punti in cui il denominatore si annulla, ovvero $t = 0$ e $t = 3$. Per $t \to 3^-$ abbiamo che

$$\frac{\log(1+t^2)}{t\sqrt{3-t}} \sim \frac{1}{\sqrt{3-t}}$$

e quindi la funzione risulta integrabile fino a $x = 3$. Quando $t \to 0$ abbiamo, usando il teorema dell'Hopital

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t^2)}{t\sqrt{3-t}} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\sqrt{3-t} - \frac{t}{2\sqrt{3-t}}} = 0.$$

quindi la funzione in zero risulta limitata e quindi integrabile. Abbiamo quindi che il domino di F è $x \leq 3$.

4. Data la funzione $f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$, dimostrare che il limite

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2f(x) - f(2x)}{x - f(x)}$$

esiste ed è finito e eventualmente calcolarlo.

Soluzione Si vede immediatamente che il limite ha la forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Per vedere se esiste proviamo ad applicare il teorema dell'Hopital. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2f'(x) - 2f'(2x)}{1 - f'(x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2\frac{\sin(x)}{x} - 2\frac{\sin(2x)}{2x}}{1 - \frac{\sin(x)}{x}}$$

che continua ad essere una forma indeterminata. Sapendo però che lo sviluppo al secondo ordine in un intorno dell'origine di $\sin(x)$ vale $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ abbiamo

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \quad \text{e} \quad \frac{\sin(2x)}{2x} = 1 - \frac{2x^2}{3} + o(x^2)$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2\frac{\sin(x)}{x} - 2\frac{\sin(2x)}{2x}}{1 - \frac{\sin(x)}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(2 - \frac{x^2}{3}) - (2 - \frac{4x^2}{3}) + o(x^2)}{1 - (1 - \frac{x^2}{6}) + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{6} + o(x^2)} = 6.$$

Il teorema dell'Hopital ci garantisce allora che il limite cercato esiste, e vale 6 (e quindi è finito)