

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

22 luglio 2016

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=514305

PARTE A

1. Dire per quale codominio la funzione $f(x) = \frac{1}{1+xe^x}$ definita su $D = [0, +\infty[$ è bigettiva
A: N.A. B: $]0, +\infty[$ C: N.E. D: $]0, 1[$ E: $]0, 1]$
2. Sia $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, allora $y'(1)$ vale
A: N.A. B: $\frac{e^2-1}{2e}$ C: $\frac{e^2+1}{2e}$ D: $-\sin(1)$ E: $\sin(1)$
3. Trovare le soluzioni complesse di $16z^2 - z^6 = 0$ con parte immaginaria di z negativa
A: $z = 2i, -2i$ B: $z = -i$ C: $z = -2i$ D: N.E. E: N.A.
4. Quale tra questi punti appartiene all'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 3^n}{e^n(1+n)} x^n$$

- A: $x = e$ B: $x = -1.87$ C: $x = \sqrt{\pi}$ D: $x = -\pi$ E: N.A.
5. Data $f(x) = (\sin(x^2))^{x^3}$ allora $f'(\sqrt{\pi/2})$ è uguale a
A: $\sin(\sqrt{\pi/2})^{3(\frac{\pi}{2})^2}$ B: N.A. C: 1 D: -2 E: 0
 6. Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = \log(x+1)$ la funzione composta $g(f(x))$ risulta definita in
A: $(-\infty, 0)$ B: N.A. C: \mathbb{R} D: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ E: $(-1, +\infty)$
 7. $\inf \min \sup$ e \max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x^2) < e\}$$

valgono

- A: $\{0, N.E., \sqrt{e^e}, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{0, 0, \sqrt{e^e}, N.E.\}$ E: $\{-e^{e/2}, N.E., e^{e/2}, N.E.\}$
8. Il limite
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^3} - 1}{\sin(x) \tan(2x)}$$

vale
A: N.A. B: 0 C: $\log(1/3)$ D: $1/2$ E: $1/3$
 9. Lo sviluppo di Taylor di grado 4 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $y(x) = \cos(x^2)$ vale
A: $1 + 2 \cos(x^2)x + o(x^3)$ B: $1 + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$ C: N.A. D: $1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ E: $x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

10. L'integrale

$$\int_0^1 x e^{-x^2+2} dx$$

vale

- A: $e^2 - e$ B: $\frac{e-1}{2}$ C: N.A. D: e^2 E: $\frac{e^2-e}{2}$

CODICE=514305

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

22 luglio 2016

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=389812

PARTE A

1. Quale tra questi punti appartiene all'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 3^n}{e^n (1+n)} x^n$$

A: $x = e$ B: $x = \sqrt{\pi}$ C: N.A. D: $x = -\pi$ E: $x = -1.87$

2. Trovare le soluzioni complesse di $16z^2 - z^6 = 0$ con parte immaginaria di z negativa

A: N.E. B: $z = -2i$ C: N.A. D: $z = -i$ E: $z = 2i, -2i$

3. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^3} - 1}{\sin(x) \tan(2x)}$$

vale

A: $1/3$ B: N.A. C: 0 D: $1/2$ E: $\log(1/3)$

4. Lo sviluppo di Taylor di grado 4 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $y(x) = \cos(x^2)$ vale

A: $1 + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$ B: $x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ C: N.A. D: $1 + 2 \cos(x^2)x + o(x^3)$ E: $1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

5. Data $f(x) = (\sin(x^2))^{x^3}$ allora $f'(\sqrt{\pi/2})$ è uguale a

A: -2 B: N.A. C: 0 D: $\sin(\sqrt{\pi/2})^{3(\frac{\pi}{2})^2}$ E: 1

6. Dire per quale codominio la funzione $f(x) = \frac{1}{1+xe^x}$ definita su $D = [0, +\infty[$ è bigettiva

A: $]0, +\infty[$ B: N.E. C: $]0, 1[$ D: $]0, 1]$ E: N.A.

7. L'integrale

$$\int_0^1 x e^{-x^2+2} dx$$

vale

A: $\frac{e^2-e}{2}$ B: N.A. C: $e^2 - e$ D: $\frac{e-1}{2}$ E: e^2

8. Sia $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$, allora $y'(1)$ vale

A: $\frac{e^2+1}{2e}$ B: $\sin(1)$ C: N.A. D: $\frac{e^2-1}{2e}$ E: $-\sin(1)$

9. Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = \log(x+1)$ la funzione composta $g(f(x))$ risulta definita in

A: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ B: $(-\infty, 0)$ C: \mathbb{R} D: N.A. E: $(-1, +\infty)$

10. $\inf \min \sup$ e \max dell' insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x^2) < e\}$$

valgono

A: $\{-e^{e/2}, N.E., e^{e/2}, N.E.\}$ B: $\{0, 0, \sqrt{e^e}, N.E.\}$ C: $\{0, N.E., \sqrt{e^e}, N.E.\}$ D: N.A. E: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$

CODICE=389812

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

22 luglio 2016

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=627565

PARTE A

1. inf min sup e max dell' insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x^2) < e\}$$

valgono

A: $\{0, 0, \sqrt{e^e}, N.E.\}$ B: $\{0, N.E., \sqrt{e^e}, N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{-e^{e/2}, N.E., e^{e/2}, N.E.\}$
E: N.A.

2. Sia $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$, allora $y'(1)$ vale

A: N.A. B: $-\sin(1)$ C: $\frac{e^2-1}{2e}$ D: $\frac{e^2+1}{2e}$ E: $\sin(1)$

3. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 1}{\sin(x) \tan(2x)}$$

vale

A: $1/3$ B: $\log(1/3)$ C: N.A. D: $1/2$ E: 0

4. Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = \log(x + 1)$ la funzione composta $g(f(x))$ risulta definita in

A: \mathbb{R} B: $(-\infty, 0)$ C: N.A. D: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ E: $(-1, +\infty)$

5. L'integrale

$$\int_0^1 x e^{-x^2+2} dx$$

vale

A: N.A. B: $e^2 - e$ C: $\frac{e-1}{2}$ D: $\frac{e^2-e}{2}$ E: e^2

6. Trovare le soluzioni complesse di $16z^2 - z^6 = 0$ con parte immaginaria di z negativa

A: $z = -i$ B: $z = -2i$ C: N.A. D: $z = 2i, -2i$ E: N.E.

7. Data $f(x) = (\sin(x^2))^{x^3}$ allora $f'(\sqrt{\pi/2})$ è uguale a

A: N.A. B: -2 C: 1 D: $\sin(\sqrt{\pi/2})^{3(\frac{\pi}{2})^2}$ E: 0

8. Dire per quale codominio la funzione $f(x) = \frac{1}{1+xe^x}$ definita su $D = [0, +\infty[$ è bigettiva

A: $]0, 1[$ B: N.A. C: $]0, +\infty[$ D: $]0, 1]$ E: N.E.

9. Quale tra questi punti appartiene all'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 3^n}{e^n(1+n)} x^n$$

A: N.A. B: $x = -1.87$ C: $x = \sqrt{\pi}$ D: $x = e$ E: $x = -\pi$

10. Lo sviluppo di Taylor di grado 4 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $y(x) = \cos(x^2)$ vale

A: $1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ B: N.A. C: $x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ D: $1 + 2 \cos(x^2)x + o(x^3)$ E: $1 + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$

CODICE=627565

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

22 luglio 2016

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=221019

PARTE A

1. L'integrale

$$\int_0^1 x e^{-x^2+2} dx$$

vale

A: $\frac{e^2-e}{2}$ B: N.A. C: $\frac{e-1}{2}$ D: e^2 E: $e^2 - e$

2. Data $f(x) = (\sin(x^2))^{x^3}$ allora $f'(\sqrt{\pi/2})$ è uguale a

A: N.A. B: -2 C: 1 D: $\sin(\sqrt{\pi/2})^{3(\frac{\pi}{2})^2}$ E: 0

3. Quale tra questi punti appartiene all'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 3^n}{e^n(1+n)} x^n$$

A: $x = -1.87$ B: $x = e$ C: N.A. D: $x = -\pi$ E: $x = \sqrt{\pi}$

4. Lo sviluppo di Taylor di grado 4 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $y(x) = \cos(x^2)$ vale

A: $1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ B: $x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ C: $1 + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$ D: $1 + 2 \cos(x^2)x + o(x^3)$ E: N.A.

5. Trovare le soluzioni complesse di $16z^2 - z^6 = 0$ con parte immaginaria di z negativa

A: $z = 2i, -2i$ B: $z = -2i$ C: N.A. D: $z = -i$ E: N.E.

6. Dire per quale codominio la funzione $f(x) = \frac{1}{1+xe^x}$ definita su $D = [0, +\infty[$ è bigettiva

A: $]0, +\infty[$ B: N.A. C: $]0, 1[$ D: N.E. E: $]0, 1]$

7. Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = \log(x+1)$ la funzione composta $g(f(x))$ risulta definita in

A: $(-\infty, 0)$ B: $(-1, +\infty)$ C: \mathbb{R} D: N.A. E: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

8. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^3} - 1}{\sin(x) \tan(2x)}$$

vale

A: 0 B: $1/2$ C: $\log(1/3)$ D: $1/3$ E: N.A.

9. $\inf \min \sup$ e \max dell' insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x^2) < e\}$$

valgono

A: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ B: $\{0, N.E., \sqrt{e^e}, N.E.\}$ C: $\{0, 0, \sqrt{e^e}, N.E.\}$ D: N.A. E: $\{-e^{e/2}, N.E., e^{e/2}, N.E.\}$

10. Sia $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$, allora $y'(1)$ vale

A: $\frac{e^2+1}{2e}$ B: $\sin(1)$ C: $\frac{e^2-1}{2e}$ D: N.A. E: $-\sin(1)$

CODICE=221019

CODICE=514305

CODICE=389812

CODICE=627565

CODICE=221019

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

22 luglio 2016

PARTE B

1. Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = |\log(\lambda + x)| - \lambda$$

Calcolare per $\lambda = 1$, l'area della porzione di piano finita compresa tra l'asse delle x e il grafico della f .

Soluzione. Il dominio della funzione è $D = \{x \in \mathbb{R} : x > -\lambda\}$, in tale insieme si ha

$$f(x) = \begin{cases} -\log(x + \lambda) - \lambda, & \text{se } -\lambda < x < 1 - \lambda, \\ \log(x + \lambda) - \lambda, & \text{se } x \geq 1 - \lambda. \end{cases}$$

La funzione f risulta continua in D , in particolare $\lim_{x \rightarrow 1-\lambda} f(x) = -\lambda$ e si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\lambda^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

La funzione f è derivabile in $D \setminus \{1 - \lambda\}$ e si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x + \lambda}, & \text{se } -\lambda < x < 1 - \lambda, \\ \frac{1}{x + \lambda}, & \text{se } x > 1 - \lambda. \end{cases}$$

Quindi f risulta decrescente per $-\lambda < x < 1 - \lambda$ e crescente per $x > 1 - \lambda$, si ha un punto di minimo assoluto in $x = 1 - \lambda$, anche se in tale punto f non è derivabile. Il minimo vale $f(1 - \lambda) = -\lambda$. La funzione poi risulta convessa per $-\lambda < x < 1 - \lambda$ e concava per $x > 1 - \lambda$.

La regione di piano in questione è delimitata dai punti di intersezione con l'asse delle x che hanno ascissa $x_1 = e^{-1} - 1$ e $x_2 = e - 1$ e in tale intervallo f risulta negativa. Pertanto

$$\begin{aligned} A &= \int_{e^{-1}-1}^{e-1} \left| |\log(x) + 1| - 1 \right| dx \\ &= - \int_{e^{-1}-1}^{e-1} |\log(x) + 1| - 1 dx = \int_{e^{-1}-1}^0 -\log(x+1) - 1 dx - \int_0^{e-1} \log(x+1) - 1 dx \\ &= (-\log(1+x) - x \log(1+x)) \Big|_{e^{-1}}^0 + (-2x + \log(1+x) + x \log(1+x)) \Big|_0^{e-1} \\ &= \frac{e^2 - 2e + 1}{e^2}. \end{aligned}$$

CODICE=221019

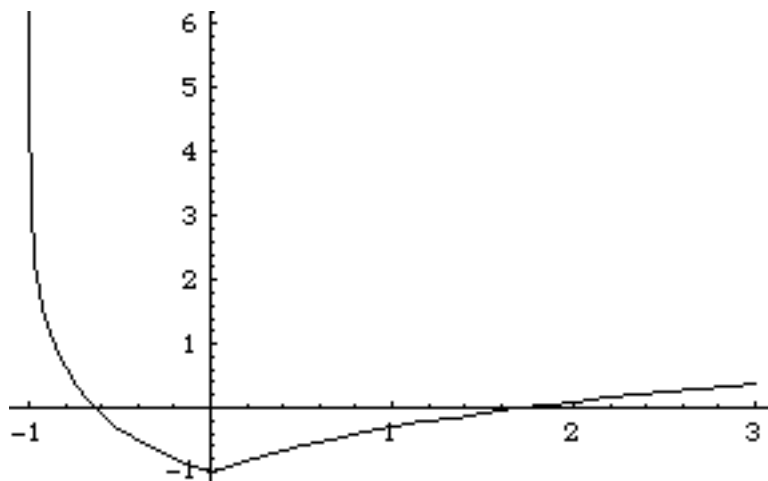


Figura 1: Grafico di $f(x) = |\log(\lambda + x)| - \lambda$, per $\lambda = 1$

Il grafico approssimativo è quindi il seguente, che non cambia in maniera qualitativa al variare di λ .

2. Data l'equazione

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x.$$

- Si trovi lo spazio delle soluzioni dell'omogenea
- Si trovi una soluzione dell'equazione differenziale con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
- Si dica se esiste qualche soluzione dell'equazione differenziale tale che $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ esiste ed è minore o uguale a zero?

Soluzione: (a) L'equazione associata all'omogenea è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, con soluzioni $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$y_0(x) = A e^{2x} + B e^x \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(b) Il termine non omogeneo e^x è risonante. Cerchiamo allora una soluzione particolare della forma $y_p = c x e^x$

Si trova facilmente che $c = -1$, quindi l'integrale generale dell'equazione completa è

$$y_f(x) = A e^{2x} + B e^x - x e^x.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha $A + B = 1$, $2A + B - 1 = 0$ ovvero $A = 0$ e $B = 1$; la soluzione cercata è $y(x) = (1 - x) e^x$.

(c) Si ha che per $A < 0$ e B qualsiasi o per $A = 0$ e $B \leq 0$ vale $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = -\infty$.

3. Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\log(\lambda)} (x - 1)^n$$

Soluzione: Si tratta di una semplice serie di potenze osservando che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\log(\lambda)} (x - 1)^n = \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{(\log(\lambda))} \sum_{n=1}^{\infty} (x - 1)^n \quad \text{per } \lambda > 0, \lambda \neq 1.$$

La restrizione $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$ serve per dare senso alla frazione, evitando che si annulli il denominatore.

Pertanto la serie converge se $|x - 1| < 1$ e inoltre, usando la formula per la somma (se convergente) di una progressione geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\log(\lambda)} (x - 1)^n = \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\log(\lambda)} \left[\frac{1}{1 - (x - 1)} - 1 \right], \quad \text{per } 0 < x < 2, \lambda > 0, \lambda \neq 1.$$

La serie non converge se $|x - 1| \geq 1$. Per affermare questo osserviamo che tale risultato è vero per la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (x - 1)^n$ e dato che il fattore moltiplicativo $\frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\log(\lambda)}$ non si annulla mai, lo stesso vale anche per la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\log(\lambda)} (x - 1)^n$.

4. Data la funzione

$$F(x) = \int_1^x \frac{\arcsin(t/2)}{t + 1} dt$$

si dimostri che è continua e derivabile su $(-1, 2)$ e si scriva l'equazione della retta tangente a F nel punto $x = 1$.

Studiare gli intervalli di monotonia.

Soluzione: La funzione $\arcsin(t/2)$ è definita per $-1 < t/2 < 1$, ovvero per $-2 < t < 2$. La funzione $t + 1$ è definita per $t \neq -1$, quindi scelto un $x \in (-1, 2)$ sicuramente la funzione $\frac{\arcsin(t/2)}{t+1}$ è definita e continua nell'intervallo $[1, x]$ ($[x, 1]$ se $x < 1$). Dunque la funzione $F(x)$ è ben definita per ogni $x \in (-1, 2)$. Inoltre, dato che $\frac{\arcsin(t/2)}{t+1}$ è continua, per il teorema fondamentale del calcolo abbiamo anche che $F(x)$ è derivabile su $(-1, 2)$ con derivata $F'(x) = \frac{\arcsin(x/2)}{x+1}$. Pertanto la funzione derivata risulta positiva per $0 < x \leq 2$ e negativa per $-1 < x < 0$, e la funzione F ha un punto di minimo per $x = 0$.

Per $x = 1$ abbiamo $F'(1) = \frac{\arcsin(1/2)}{2} = \frac{\pi}{12}$ e $F(1) = 0$ quindi la retta tangente al grafico $y = F(x)$, che ha equazione $y = F(1) + F'(1)(x - 1)$, diventa

$$y = \frac{\pi}{12}(x - 1).$$