

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

1 luglio 2016

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=406308

PARTE A

1. Quale tra questi punti appartiene all'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n} x^n$$

A: $x = 1.99$ B: $x = -\sqrt{2}$ C: N.A. D: $x = \pi$ E: $x = -1.99$

2. Lo sviluppo di Taylor di grado 3 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $y(x) = \sin(x^2)$ vale

A: $1 + 2 \cos(x^2)x + o(x^3)$ B: $x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ C: $1 + x^2 + o(x^5)$ D: N.A. E: $x^2 + o(x^3)$

3. \inf \min \sup e \max della funzione $x \sin(x)$ per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ valgono

A: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$ B: $\{0, 0, \pi/2, N.E.\}$ C: $\{0, 0, \pi/2, \pi/2\}$ D: $\{0, N.E., 1, N.E.\}$
E: N.A.

4. Date le funzioni $f(x) = \log(x+1)$ e $g(x) = x^2$ la funzione composta $g(f(x))$ risulta definita in

A: \mathbb{R} B: $(-1, +\infty)$ C: $(-\infty, 0)$ D: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ E: N.A.

5. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{\sin(x) \sin(2x)}$$

vale

A: 2 B: $\log(1/3)$ C: N.A. D: $1/2$ E: $1/3$

6. Data $f(x) = e^{|x|} |1-x|$. Allora $f'(2)$ è uguale a

A: N.A. B: N.E. C: $-2e^2$ D: $2e^2$ E: 0

7. L'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^{3x} - 1}{e^{3x} - 3x} dx$$

vale

A: $\log((e^3 - 3)^{1/3})$ B: $1 - \frac{\log(3)}{3}$ C: N.E. D: 0 E: N.A.

8. L'argomento principale del numero complesso $i \frac{e^{i27\pi}}{e^{-i54\pi}}$ è uguale a

A: $\pi/4$ B: $\pi/2$ C: N.A. D: 0 E: $-\pi/2$

9. Sia $y'' - y = 0$, $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$, allora $y'(1)$ vale

A: N.A. B: $\frac{e^2+1}{2e}$ C: $\frac{e^2-1}{2e}$ D: $-\sin(1)$ E: $\sin(1)$

10. Quante sono, al variare di $q \in \mathbb{R}$ le soluzioni reali dell'equazione $e^x = -x + q$

A: 1 se $q > 0$, nessuna se $q \leq 0$ B: 1 C: N.A. D: nessuna E: 2

CODICE=406308

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

1 luglio 2016

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=240102

PARTE A

1. \inf \min \sup e \max della funzione $x \sin(x)$ per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ valgono

A: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$ B: $\{0, N.E., 1, N.E.\}$ C: N.A. D: $\{0, 0, \pi/2, N.E.\}$ E: $\{0, 0, \pi/2, \pi/2\}$

2. Quale tra questi punti appartiene all'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n} x^n$$

A: $x = \pi$ B: $x = -1.99$ C: $x = 1.99$ D: N.A. E: $x = -\sqrt{2}$

3. L'argomento principale del numero complesso $i \frac{e^{i27\pi}}{e^{-i54\pi}}$ è uguale a

A: $\pi/2$ B: $\pi/4$ C: $-\pi/2$ D: N.A. E: 0

4. Date le funzioni $f(x) = \log(x+1)$ e $g(x) = x^2$ la funzione composta $g(f(x))$ risulta definita in

A: \mathbb{R} B: $(-\infty, 0)$ C: $(-1, +\infty)$ D: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ E: N.A.

5. Data $f(x) = e^{|x|} |1-x|$. Allora $f'(2)$ è uguale a

A: $-2e^2$ B: 0 C: N.E. D: N.A. E: $2e^2$

6. Lo sviluppo di Taylor di grado 3 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $y(x) = \sin(x^2)$ vale

A: N.A. B: $x^2 + o(x^3)$ C: $x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ D: $1 + x^2 + o(x^5)$ E: $1 + 2 \cos(x^2)x + o(x^3)$

7. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{\sin(x) \sin(2x)}$$

vale

A: 2 B: N.A. C: $\log(1/3)$ D: $1/3$ E: $1/2$

8. Quante sono, al variare di $q \in \mathbb{R}$ le soluzioni reali dell'equazione $e^x = -x + q$

A: N.A. B: 1 C: nessuna D: 2 E: 1 se $q > 0$, nessuna se $q \leq 0$

9. Sia $y'' - y = 0$, $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$, allora $y'(1)$ vale

A: $\frac{e^2+1}{2e}$ B: $\frac{e^2-1}{2e}$ C: N.A. D: $-\sin(1)$ E: $\sin(1)$

10. L'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^{3x} - 1}{e^{3x} - 3x} dx$$

vale

A: $1 - \frac{\log(3)}{3}$ B: 0 C: N.E. D: $\log((e^3 - 3)^{1/3})$ E: N.A.

CODICE=240102

CODICE=240102

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

1 luglio 2016

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=991859

PARTE A

1. Date le funzioni $f(x) = \log(x+1)$ e $g(x) = x^2$ la funzione composta $g(f(x))$ risulta definita in

A: $(-1, +\infty)$ B: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ C: N.A. D: $(-\infty, 0)$ E: \mathbb{R}

2. \inf , \min , \sup e \max della funzione $x \sin(x)$ per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ valgono

A: N.A. B: $\{0, 0, \pi/2, N.E.\}$ C: $\{0, 0, \pi/2, \pi/2\}$ D: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$ E: $\{0, N.E., 1, N.E.\}$

3. Quale tra questi punti appartiene all'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n} x^n$$

A: $x = 1.99$ B: $x = \pi$ C: $x = -\sqrt{2}$ D: N.A. E: $x = -1.99$

4. L'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^{3x} - 1}{e^{3x} - 3x} dx$$

vale

A: $\log((e^3 - 3)^{1/3})$ B: N.E. C: N.A. D: $1 - \frac{\log(3)}{3}$ E: 0

5. Quante sono, al variare di $q \in \mathbb{R}$ le soluzioni reali dell'equazione $e^x = -x + q$

A: 2 B: N.A. C: nessuna D: 1 E: 1 se $q > 0$, nessuna se $q \leq 0$

6. Lo sviluppo di Taylor di grado 3 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $y(x) = \sin(x^2)$ vale

A: $1 + 2 \cos(x^2)x + o(x^3)$ B: $x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ C: $x^2 + o(x^3)$ D: $1 + x^2 + o(x^5)$ E: N.A.

7. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{\sin(x) \sin(2x)}$$

vale

A: 2 B: N.A. C: 1/2 D: $\log(1/3)$ E: 1/3

8. Data $f(x) = e^{|x|} |1 - x|$. Allora $f'(2)$ è uguale a

A: 0 B: $-2e^2$ C: $2e^2$ D: N.A. E: N.E.

9. L'argomento principale del numero complesso $i \frac{e^{i27\pi}}{e^{-i54\pi}}$ è uguale a

A: $\pi/2$ B: $\pi/4$ C: $-\pi/2$ D: 0 E: N.A.

10. Sia $y'' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, allora $y'(1)$ vale

A: $-\sin(1)$ B: $\frac{e^2-1}{2e}$ C: $\sin(1)$ D: $\frac{e^2+1}{2e}$ E: N.A.

CODICE=991859

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

1 luglio 2016

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

CODICE=795200

PARTE A

1. Quale tra questi punti appartiene all'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n} x^n$$

A: N.A. B: $x = \pi$ C: $x = 1.99$ D: $x = -1.99$ E: $x = -\sqrt{2}$

2. Sia $y'' - y = 0$, $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$, allora $y'(1)$ vale

A: N.A. B: $-\sin(1)$ C: $\sin(1)$ D: $\frac{e^2-1}{2e}$ E: $\frac{e^2+1}{2e}$

3. Data $f(x) = e^{|x|} |1-x|$. Allora $f'(2)$ è uguale a

A: N.E. B: N.A. C: $2e^2$ D: $-2e^2$ E: 0

4. L'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^{3x} - 1}{e^{3x} - 3x} dx$$

vale

A: 0 B: N.E. C: N.A. D: $1 - \frac{\log(3)}{3}$ E: $\log((e^3 - 3)^{1/3})$

5. Date le funzioni $f(x) = \log(x+1)$ e $g(x) = x^2$ la funzione composta $g(f(x))$ risulta definita in

A: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ B: $(-1, +\infty)$ C: $(-\infty, 0)$ D: N.A. E: \mathbb{R}

6. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{\sin(x) \sin(2x)}$$

vale

A: $1/3$ B: $1/2$ C: 2 D: N.A. E: $\log(1/3)$

7. L'argomento principale del numero complesso $i \frac{e^{i27\pi}}{e^{-i54\pi}}$ è uguale a

A: $\pi/2$ B: 0 C: $\pi/4$ D: $-\pi/2$ E: N.A.

8. $\inf \min \sup$ e \max della funzione $x \sin(x)$ per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ valgono

A: $\{0, N.E., 1, N.E.\}$ B: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$ C: $\{0, 0, \pi/2, N.E.\}$ D: N.A. E: $\{0, 0, \pi/2, \pi/2\}$

9. Lo sviluppo di Taylor di grado 3 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $y(x) = \sin(x^2)$ vale

A: $1 + x^2 + o(x^5)$ B: $x^2 + o(x^3)$ C: $x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ D: N.A. E: $1 + 2 \cos(x^2)x + o(x^3)$

10. Quante sono, al variare di $q \in \mathbb{R}$ le soluzioni reali dell'equazione $e^x = -x + q$

A: 1 se $q > 0$, nessuna se $q \leq 0$ B: N.A. C: 2 D: nessuna E: 1

CODICE=795200

CODICE=406308

CODICE=240102

CODICE=991859

CODICE=795200

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

1 luglio 2016

PARTE B

1. Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \log |x + \lambda| - \lambda$$

Calcolare per $\lambda = 1$ e $x > 0$, l'area della porzione di piano finita compresa tra l'asse delle x e il grafico della f .

Soluzione. Il dominio della funzione è $D = \{x \neq -\lambda\}$ e in D la funzione risulta continua e derivabile (essendo composizione di funzioni derivabili per ogni $x \neq -\lambda$, dove la funzione non è definita). Inoltre

$$f(x) = \begin{cases} \log(x + \lambda) - \lambda & \text{se } x > -\lambda \\ \log(-x - \lambda) - \lambda & \text{se } x < -\lambda \end{cases}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\lambda} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calcolando la derivata prima si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x + \lambda}$$

che è positiva per $x > -\lambda$ e inoltre

$$f''(x) = -\frac{1}{(x + \lambda)^2} < 0,$$

quindi la funzione è concava nelle due semirette $\{x < -\lambda\}$ e in $\{x > -\lambda\}$, ma si osservi che non è globalmente concava. Il grafico approssimativo è quindi il seguente

La regione di piano in questione è delimitata dai punti $x_1 = 0$ dal punto di intersezione con l'asse delle x che è $x_2 = e - 1$ (in tale intervallo la funzione f è negativa e quindi

$$A = \int_0^{e-1} |\log |x + 1| - 1| dx = - \int_0^{e-1} (\log((x) + 1) - 1) dx = e - 2$$

CODICE=795200

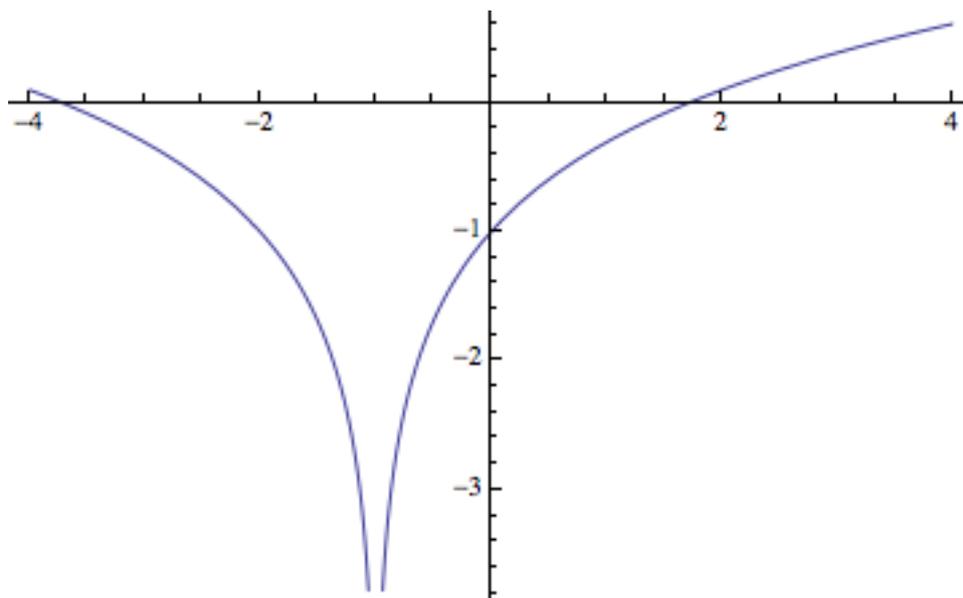


Figura 1: $f(x)$ per $\lambda = 1$

2. Trovare le soluzioni di

$$y''(x) - y(x) = -x.$$

Esistono soluzioni limitate su tutto \mathbb{R} ?

Esistono soluzioni con un asintoto obliquo $\phi(x) = x$ per $x \rightarrow +\infty$?

Esistono soluzioni limitate inferiormente su tutto \mathbb{R} ?

Soluzione. Troviamo intanto le soluzioni di $y'' - y = 0$. L'equazione associata ha la forma $\lambda^2 - 1 = 0$, quindi $\lambda = \pm 1$. Lo spazio delle soluzioni dell'omogenea si scrive come

$$y_0(x) = Ae^x + Be^{-x}, \text{ con } A, B \in \mathbb{R}.$$

Si vede immediatamente che una soluzione particolare è $y_f(x) = x$, quindi la soluzione generale dell'equazione data è

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x} + x, \text{ con } A, B \in \mathbb{R}.$$

Vediamo che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } A \geq 0 \\ -\infty & \text{se } A < 0 \end{cases}$$

quindi non esistono soluzioni limitate su tutto \mathbb{R} .

Perchè la soluzione abbia un asintoto obliquo a destra, basta scegliere $A = 0$, infatti $\lim_{x \rightarrow \infty} Be^{-x} = 0$ per ogni $B \in \mathbb{R}$.

Per trovare se esistano soluzioni limitate inferiormente vediamo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } B > 0 \\ -\infty & \text{se } B \leq 0. \end{cases}$$

Allora se $A \geq 0$ e $B > 0$ abbiamo $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = +\infty$. Questo, unito alla continuità di $y(x)$ ci dice che scegliendo $A \geq 0$ e $B > 0$ otteniamo soluzioni limitate.

3. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)|\log(x)-1|^n$$

Soluzione.

Vediamo immediatamente che per $x = 1$ la serie diventa identicamente nulla, quindi converge (a zero).

Per $x \neq 1$ usiamo il criterio della radice, ottenendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n(x-1)|\log(x)-1|^n} = |\log(x)-1|$$

Quindi se $|\log(x)-1| < 1$ ovvero se

$$1 < x < e^2$$

la serie converge, mentre se

$$x > e^2 \text{ oppure } x < 1$$

la serie diverge.

Sappiamo già che per $x = 1$ la serie converge, mentre per $x = e^2$ la serie diventa

$$\sum_n n(e^2-1) = +\infty.$$

Concludendo, la serie converge se e solo se $1 \leq x < e^2$.

4. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x \sin^2(t) dt}{x^2} & x > 0 \\ a & x = 0 \\ x^2 + bx & x < 0 \end{cases}$$

Si determini per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione è continua e per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione è derivabile.

Calcolare, se esiste, la retta tangente al grafico nel punto $x_0 = \pi$, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$,

Soluzione. La funzione è sicuramente continua e derivabile se $x \neq 0$ ed è rilevante studiare il comportamento solo in 0. Abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

quindi intanto per avere la continuità da sinistra condizione necessaria è $a = 0$. La funzione è continua se

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

e tale limite è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Usando l'Hopital si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(x)}{2x} = 0,$$

quindi f è continua se $a = 0$. Per la derivabilità (che ha senso studiare solo se $a = 0$) la derivata sinistra in zero vale

$$f'_-(0) = b.$$

CODICE=795200

La derivata destra è uguale a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sin^2(t) dt}{x^3}$ che di nuovo è una forma indeterminata risolvibile con l'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(x)}{3x^2} = \frac{1}{3},$$

quindi la funzione è derivabile se $b = \frac{1}{3}$.

La retta tangente nel punto $x_0 = \pi$ vale

$$\phi(x) = f(\pi) + \phi'(\pi)(x - \pi)$$

calcoliamo $f(\pi)$

$$f(\pi) = \frac{\int_0^\pi \sin^2(t) dt}{\pi^2} = \frac{1}{2\pi},$$

mentre

$$f'(\pi) = \frac{\pi^2 \sin^2(\pi) - 2\pi \int_0^\pi \sin^2(t) dt}{\pi^4} = -\frac{1}{\pi^2}.$$

dove abbiamo usato che $\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}(x - \cos(x) \sin(x))$.