Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 settembre 2015

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=146179

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 settembre 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=146179

PARTE A

1. La derivata della funzione $x(t) = \int_0^{t^2+1} \sin(z)\, dz$ vale

   A: $2t\sin(t^2+1)$ B: N.A. C: $2t\sin(t^2)$ D: $\sin(t^2)$ E: N.E.

2. L'integrale
$$\int_{-1}^{2} |x|\, dx$$
   vale

   A: $\sqrt{2}$ B: $7/2$ C: N.A. D: 0 E: $3/2$

3. Dati $\alpha > 0$ e $f_\alpha(x) = 3(\log(\alpha x))$. Allora $f'_\alpha(\mathrm{e})$ è uguale a

   A: $\frac{\mathrm{e}^3}{\alpha}$ B: $\frac{3}{\mathrm{e}}$ C: $\alpha\log(3\mathrm{e})$ D: $\frac{3\alpha}{\mathrm{e}}$ E: N.A.

4. La funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \log(1+x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: N.A. B: non è né continua né derivabile. C: è continua e derivabile. D: è continua, ma non derivabile. E: è derivabile, ma non continua.

5. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(\sin(x))$ nel punto $x_0 = 0$ vale

   A: N.A. B: $1 + x + x^2$ C: $1 + 2x - \frac{\pi}{2}$ D: $1 + x$ E: $1 + \sin(x)\, x$

6. Modulo e argomento del numero complesso $z = i^{44}$ sono

   A: $(1, 44\pi)$ B: $(1, 3\pi/2)$ C: $(2, 44\pi)$ D: $(2, 2\pi/3)$ E: N.A.

7. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^3 + \cos(x))}{3\log(x)}$$
   vale

   A: 0 B: N.A. C: $+\infty$ D: 1 E: N.E.

8. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x)\cos(x) < 0\}$$
   valgono

   A: $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$ B: $\{0, 0, \pi, \pi\}$ C: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$ D: N.A. E: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$

9. La serie a termini non-negativi
$$\sum_{n>[\pi]}^{\infty} \frac{1+n^2}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$
   converge per

   A: N.A. B: $\alpha > 1$ C: $\alpha > 2$ D: $3 < \alpha < \pi$ E: $\alpha \geq 1$

10. La funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^{20}$ è

    A: surgettiva B: monotona crescente C: iniettiva D: N.A. E: derivabile ovunque

CODICE=146179

CODICE=146179

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 settembre 2015

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=824125

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 settembre 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=824125

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x)\cos(x) < 0\}$$

valgono

A: N.A. B: $\{0, 0, \pi, \pi\}$ C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$ E: $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$

2. La funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \log(1+x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

A: è continua, ma non derivabile. B: è continua e derivabile. C: non è né continua né derivabile. D: è derivabile, ma non continua. E: N.A.

3. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x^3 + \cos(x))}{3\log(x)}$$

vale

A: N.E. B: 1 C: $+\infty$ D: N.A. E: 0

4. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(\sin(x))$ nel punto $x_0 = 0$ vale

A: $1 + x$ B: $1 + x + x^2$ C: $1 + 2x - \frac{\pi}{2}$ D: $1 + \sin(x)\,x$ E: N.A.

5. Dati $\alpha > 0$ e $f_\alpha(x) = 3(\log(\alpha x))$. Allora $f'_\alpha(\mathrm{e})$ è uguale a

A: $\alpha\log(3\mathrm{e})$ B: $\frac{3}{\mathrm{e}}$ C: $\frac{\mathrm{e}^3}{\alpha}$ D: N.A. E: $\frac{3\alpha}{\mathrm{e}}$

6. Modulo e argomento del numero complesso $z = i^{44}$ sono

A: $(1, 44\pi)$ B: N.A. C: $(2, 44\pi)$ D: $(2, 2\pi/3)$ E: $(1, 3\pi/2)$

7. La derivata della funzione $x(t) = \int_0^{t^2+1} \sin(z)\,dz$ vale

A: $2t\sin(t^2+1)$ B: N.E. C: $2t\sin(t^2)$ D: N.A. E: $\sin(t^2)$

8. L'integrale

$$\int_{-1}^{2} |x|\,dx$$

vale

A: $\sqrt{2}$ B: $3/2$ C: 0 D: $7/2$ E: N.A.

9. La serie a termini non-negativi

$$\sum_{n > [\pi]}^{\infty} \frac{1+n^2}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

converge per

A: N.A. B: $3 < \alpha < \pi$ C: $\alpha \geq 1$ D: $\alpha > 2$ E: $\alpha > 1$

10. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^{20}$ è

A: N.A. B: iniettiva C: surgettiva D: monotona crescente E: derivabile ovunque

CODICE=824125

CODICE=824125

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 settembre 2015

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=580195

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 settembre 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=580195

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x)\cos(x) < 0\}$$
valgono
A: N.A. B: $\{0, 0, \pi, \pi\}$ C: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$ D: $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$ E: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$

2. Dati $\alpha > 0$ e $f_\alpha(x) = 3(\log(\alpha x))$. Allora $f'_\alpha(\mathrm{e})$ è uguale a
A: $\frac{3\alpha}{\mathrm{e}}$ B: $\frac{3}{\mathrm{e}}$ C: $\frac{\mathrm{e}^3}{\alpha}$ D: $\alpha\log(3\mathrm{e})$ E: N.A.

3. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(\sin(x))$ nel punto $x_0 = 0$ vale
A: N.A. B: $1 + \sin(x)\,x$ C: $1 + x + x^2$ D: $1 + x$ E: $1 + 2x - \frac{\pi}{2}$

4. La derivata della funzione $x(t) = \int_0^{t^2+1} \sin(z)\,dz$ vale
A: $\sin(t^2)$ B: $2t\sin(t^2 + 1)$ C: N.E. D: $2t\sin(t^2)$ E: N.A.

5. La serie a termini non-negativi
$$\sum_{n>[\pi]}^{\infty} \frac{1+n^2}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$
converge per
A: $3 < \alpha < \pi$ B: $\alpha > 1$ C: $\alpha > 2$ D: $\alpha \geq 1$ E: N.A.

6. La funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^{20}$ è
A: surgettiva B: iniettiva C: N.A. D: monotona crescente E: derivabile ovunque

7. Modulo e argomento del numero complesso $z = i^{44}$ sono
A: N.A. B: $(1, 44\pi)$ C: $(2, 2\pi/3)$ D: $(1, 3\pi/2)$ E: $(2, 44\pi)$

8. La funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \log(1+x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$
A: è continua, ma non derivabile. B: non è né continua né derivabile. C: è continua e derivabile. D: N.A. E: è derivabile, ma non continua.

9. L'integrale
$$\int_{-1}^{2} |x|\,dx$$
vale
A: $3/2$ B: $7/2$ C: $\sqrt{2}$ D: N.A. E: 0

10. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^3 + \cos(x))}{3\log(x)}$$
vale
A: N.E. B: 0 C: 1 D: N.A. E: $+\infty$

CODICE=580195

CODICE=580195

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 settembre 2015

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=233769

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 settembre 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=233769

PARTE A

1. La derivata della funzione $x(t) = \int_0^{t^2+1} \sin(z)\, dz$ vale

   A: N.E. B: $2t\sin(t^2)$ C: $2t\sin(t^2+1)$ D: $\sin(t^2)$ E: N.A.

2. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(\sin(x))$ nel punto $x_0 = 0$ vale

   A: $1 + x$ B: N.A. C: $1 + x + x^2$ D: $1 + \sin(x)\, x$ E: $1 + 2x - \frac{\pi}{2}$

3. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x)\cos(x) < 0\}$$

   valgono

   A: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ B: $\{0, 0, \pi, \pi\}$ C: N.A. D: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$ E: $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$

4. Il limite

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^3 + \cos(x))}{3\log(x)}$$

   vale

   A: 0 B: 1 C: N.E. D: N.A. E: $+\infty$

5. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^{20}$ è

   A: surgettiva B: monotona crescente C: derivabile ovunque D: iniettiva E: N.A.

6. Modulo e argomento del numero complesso $z = i^{44}$ sono

   A: N.A. B: $(2, 44\pi)$ C: $(1, 3\pi/2)$ D: $(1, 44\pi)$ E: $(2, 2\pi/3)$

7. L'integrale

   $$\int_{-1}^{2} |x|\, dx$$

   vale

   A: $\sqrt{2}$ B: $7/2$ C: 0 D: $3/2$ E: N.A.

8. La serie a termini non-negativi

   $$\sum_{n>[\pi]}^{\infty} \frac{1+n^2}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

   converge per

   A: $\alpha > 1$ B: $\alpha \geq 1$ C: $\alpha > 2$ D: N.A. E: $3 < \alpha < \pi$

9. Dati $\alpha > 0$ e $f_\alpha(x) = 3(\log(\alpha x))$. Allora $f'_\alpha(\mathrm{e})$ è uguale a

   A: $\frac{\mathrm{e}^3}{\alpha}$ B: N.A. C: $\frac{3\alpha}{\mathrm{e}}$ D: $\alpha\log(3\mathrm{e})$ E: $\frac{3}{\mathrm{e}}$

10. La funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \log(1+x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

    A: è continua, ma non derivabile. B: non è né continua né derivabile. C: N.A. D: è continua e derivabile. E: è derivabile, ma non continua.

CODICE=233769

CODICE=233769

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 settembre 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	●	○	○
3	○	●	○	○	○
4	○	○	○	●	○
5	●	○	○	○	○
6	●	○	○	○	○
7	○	○	○	●	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	●	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=146179

CODICE=146179

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 settembre 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	●	○	○	○	○
3	○	●	○	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	●	○	○	○
6	●	○	○	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	●	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=824125

CODICE=824125

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 settembre 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	●	○	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	●	○	○	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	○	●	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=580195

CODICE=580195

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 settembre 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	●	○	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	○	○	○	●	○
7	○	○	○	○	●
8	○	○	●	○	○
9	○	○	○	○	●
10	●	○	○	○	○

CODICE=233769

CODICE=233769

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 settembre 2015

PARTE B

1. Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il grafico della funzione

$$f(x) = \log(x)\,\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{x}} \qquad x > 0.$$

Soluzione. Se $\lambda = 0$ la funzione si riduce al logaritmo naturale, pertanto cominciamo a discutere il caso $\lambda > 0$ per poi passare a $\lambda < 0$, osservando che $f(1) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e che la derivata risulta

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{x}}(x - \lambda\log(x))}{x^2}.$$

Se $\lambda > 0$ allora

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Il segno della derivata dipende solo dal termine $g(x) = x - \lambda\log(x)$, dato che gli altri sono positivi. Osserviamo che per $\lambda > 0$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

La funzione g ha come derivata

$$g'(x) = 1 - \frac{\lambda}{x}$$

che si annulla con un cambio di segno per $x = \lambda$. Pertanto la funzione g ha un minimo per $x = \lambda$. Se il minimo è positivo non ci sono cambi di segno della derivata di f. Il valore minimo di g risulta $g(\lambda) = \lambda(1 - \log(\lambda))$ che è positivo se $\lambda < \mathrm{e}$, nullo se $\lambda = \mathrm{e}$ e negativo se $\lambda > \mathrm{e}$. Pertanto se $0 < \lambda < \mathrm{e}$ la funzione f' è sempre strettamente positiva e quindi f è monotona crescente. Se $\lambda = \mathrm{e}$ la derivata f' è sempre positiva eccetto che in $x = \mathrm{e}$, ma ancora la funzione f è strettamente crescente. Invece se $\lambda > \mathrm{e}$ la funzione f' si annulla in 2 punti $x_1 < \lambda < x_2$ e quindi f risulta crescente in $]0, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ e decrescente all'interno. Il punto x_1 è un punto di massimo relativo mentre x_2 è un punto di minimo relativo.

Nel caso $\lambda < 0$ abbiamo invece

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e di nuovo il segno della derivata dipende solo da g che ora soddisfa

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

CODICE=233769

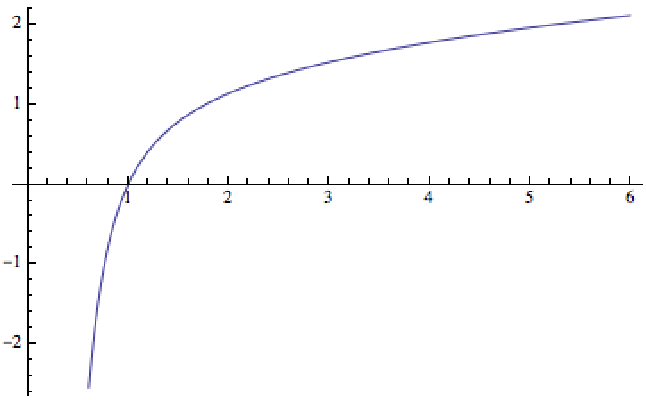

Figura 1: Andamento del grafico di f per $0 < \lambda < \mathrm{e}$

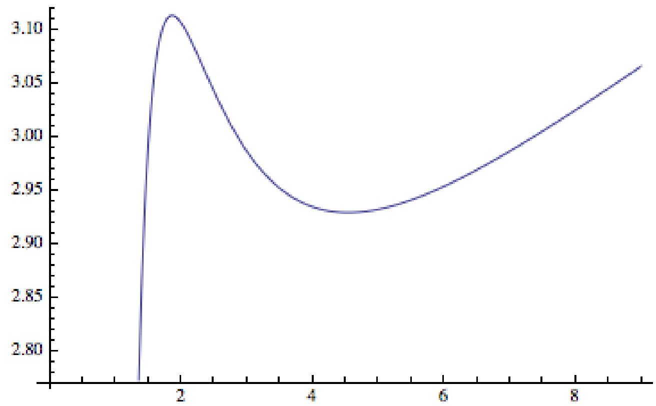

Figura 2: Andamento del grafico di f per $\mathrm{e} < \lambda$

Inoltre $g'(x)$ non si annulla mai perchè $x = \lambda$ non ha soluzioni se $x > 0$ e $\lambda < 0$ quindi la derivata è negativa per $x < x_3$ e positiva per $x > x_3$. Il punto x_3 è quello dove si annulla $g(x)$ e osserviamo che $x_3 < 1$, dato che $g(1) = 1$ per ogni λ.

2. Studiare al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[\alpha]{\log\left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right)}$$

Soluzione. La serie in questione è a termini non negativi e usando lo sviluppo di Taylor si ottiene che

$$\sqrt[\alpha]{\log\left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right)} = \log\left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right)^{1/\alpha} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\beta/\alpha}}\right) \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Pertanto la serie converge se e solo se

$$\frac{\beta}{\alpha} > 1.$$

3. Studiare la convergenza e eventualmente calcolare

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x(x+2)(x+3)}\, dx$$

CODICE=233769

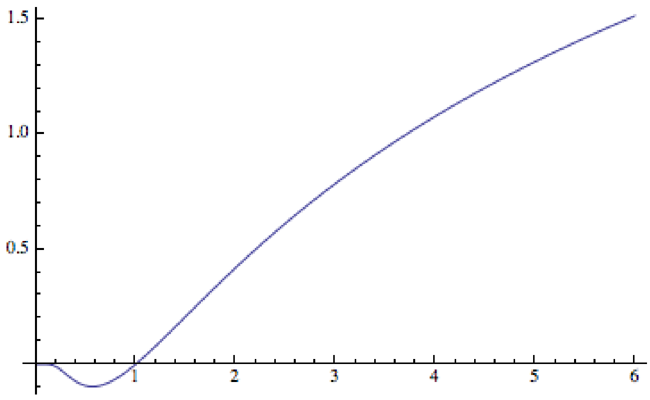

Figura 3: Andamento del grafico di f per $\lambda < 0$

Soluzione. L'integrale in questione converge perchè la funzione integranda è non-negativa e

$$\frac{x+1}{x(x+2)(x+3)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Utilizzando la scomposizione in fattori razionali

$$\frac{x+1}{x(x+2)(x+3)} = \frac{1}{6x} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+3)}$$

si ottiene che una primitiva di f è la funzione $\frac{\log(x)}{6} + \frac{1}{2}\log(x+2) - \frac{2}{3}\log(x+3)$. Pertanto

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{x+1}{x(x+2)(x+3)}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{\log(x)}{6} + \frac{1}{2}\log(x+2) - \frac{2}{3}\log(x+3)\Big|_1^b = \frac{1}{6}\log\left(\frac{256}{27}\right)$$

4. Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\sin(t)}{y(t)} \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Osserviamo che $y(0) = 0$ rende senza senso il lato destro, o perlomeno questo va inteso in un senso particolare di limite come per esempio risolvendo

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\sin(t)}{y(t)} \qquad \text{per } t \neq 0 \\ \\ \lim\limits_{t\to 0} y(t) = 0. \end{cases}$$

Manipolando comunque in maniera formale l equazione, separiamo le variabili ottenendo $ydy = \sin(t)dt$ e integriamo ottenendo

$$y^2 = 2(C - \cos(t)).$$

Se vogliamo $y(0) = 0$, allora $C = 1$. Quindi le soluzioni risultano

$$y(t) = \sqrt{2(1-\cos(t))} \qquad y(t) = -\sqrt{2(1-\cos(t))}$$

In questo caso entrambe le soluzioni sono accettabili, dato che sono funzioni derivabili per $t \neq 0$ e che si annullano per $t = 0$. Si ha un fenomeno di non unicità.

CODICE=233769

Osserviamo che in realtà non ci sono solo queste due soluzioni, dato che lo stesso fenomeno si ha anche per $t = 2k\pi$. Quindi ogni volta che viene raggiunto uno di questi punti, si può avere una soluzione che mantiene il segno o lo cambia e si può costruire una soluzione scegliendo arbitrariamente il segno davanti alla radice in ognuno degli intervalli $t \in]2k\pi, 2(k+1)\pi[$.

CODICE=233769