

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica  
Prova di Analisi Matematica 1

25 febbraio 2014

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

**CODICE=487106**



**PARTE A**

1. La funzione  $f(x) = \begin{cases} \sin(ax) & \text{per } x < 0 \\ x^2 + x & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$  è derivabile per  
A:  $a = 1$  B: mai C: N.A. D:  $a = k\pi$  E:  $a > \pi/3$

2. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

valgono

- A:  $\{\pi/3, N.E., \pi/3, N.E.\}$  B:  $\{0, 0, \pi/6, N.E.\}$  C:  $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$  D:  $\{0, 0, 2\pi, 2\pi\}$   
E: N.A.

3. Una soluzione dell'equazione differenziale  $y'(x) = \sinh(x)$  è

- A:  $e^x - e^{-x}$  B: N.E. C:  $\frac{1}{\cos(x)}$  D:  $\cosh(x) + 1$  E: N.A.

4. Data  $f(x) = (e^x)^x$ . Allora  $f'(1)$  è uguale a

- A:  $3e^3$  B: N.A. C:  $2e$  D:  $\log(2e)$  E:  $e^2$

5. L'integrale

$$\int_1^e \log(x) \frac{1}{x} dx$$

vale

- A: N.A. B:  $\sqrt{e} + 1$  C: 0 D:  $2/e$  E:  $\frac{1}{2}$

6. La retta tangente al grafico di  $y(x) = \sin(3x)$  nel punto  $x_0 = \pi/12$  vale

- A: N.A. B:  $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \pi/12)$  C:  $-\frac{-12x + \pi - 4}{4\sqrt{2}}$  D:  $1 + x + x^2$  E:  $3x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

7. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sin(x^2)}$$

vale

- A:  $\frac{1}{2}$  B:  $+\infty$  C: N.E. D: N.A. E: 0

8. La funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = e^{x^2}$  è

- A: N.A. B: monotona crescente C: surgettiva D: iniettiva E: non derivabile in  $x = 0$

9. Modulo e argomento del numero complesso  $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^4$  sono

- A:  $(27, 2\pi)$  B:  $(3^4, \pi/2)$  C:  $(3^5, 0)$  D: N.A. E:  $(9^2, 0)$

10. Dato  $x \geq 0$ , la serie a termini non-negativi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n}$$

converge per

- A:  $x > 0$  B:  $1 < x$  C:  $x = 0$  D:  $x \leq 1$  E: N.A.

Brutta Copia

**CODICE=487106**

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica  
Prova di Analisi Matematica 1

25 febbraio 2014

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

**CODICE=816710**



## PARTE A

1. L'integrale

$$\int_1^e \log(x) \frac{1}{x} dx$$

vale

A: 0   B:  $\sqrt{e} + 1$    C:  $\frac{1}{2}$    D: N.A.   E:  $2/e$

2. La funzione  $f(x) = \begin{cases} \sin(ax) & \text{per } x < 0 \\ x^2 + x & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$  è derivabile per

A:  $a > \pi/3$    B: mai   C: N.A.   D:  $a = 1$    E:  $a \in \mathbb{R}$

3. Una soluzione dell'equazione differenziale  $y'(x) = \sinh(x)$  è

A:  $\frac{1}{\cos(x)}$    B:  $\cosh(x) + 1$    C: N.A.   D:  $e^x - e^{-x}$    E: N.E.

4. Dato  $x \geq 0$ , la serie a termini non-negativi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + nx)}{n}$$

converge per

A:  $1 < x$    B:  $x = 0$    C: N.A.   D:  $x > 0$    E:  $x \leq 1$

5. Modulo e argomento del numero complesso  $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^4$  sono

A: N.A.   B:  $(27, 2\pi)$    C:  $(3^5, 0)$    D:  $(9^2, 0)$    E:  $(3^4, \pi/2)$

6. Data  $f(x) = (e^x)^x$ . Allora  $f'(1)$  è uguale a

A:  $2e$    B:  $3e^3$    C:  $\log(2e)$    D:  $e^2$    E: N.A.

7. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sin(x^2)}$$

vale

A: N.A.   B: N.E.   C:  $+\infty$    D:  $\frac{1}{2}$    E: 0

8. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

valgono

A: N.A.   B:  $\{0, 0, 2\pi, 2\pi\}$    C:  $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$    D:  $\{\pi/3, N.E., \pi/3, N.E.\}$    E:  $\{0, 0, \pi/6, N.E.\}$

9. La funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = e^{x^2}$  è

A: monotona crescente   B: non derivabile in  $x = 0$    C: N.A.   D: iniettiva   E: surgettiva

10. La retta tangente al grafico di  $y(x) = \sin(3x)$  nel punto  $x_0 = \pi/12$  vale

A:  $-\frac{-12x+\pi-4}{4\sqrt{2}}$    B:  $1 + x + x^2$    C: N.A.   D:  $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \pi/12)$    E:  $3x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

**CODICE=816710**

Brutta copia

**CODICE=816710**

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica  
Prova di Analisi Matematica 1

25 febbraio 2014

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

**CODICE=582612**



**PARTE A**

1. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sin(x^2)}$$

vale

A: N.A.   B:  $\frac{1}{2}$    C:  $+\infty$    D: 0   E: N.E.

2. Dato  $x \geq 0$ , la serie a termini non-negativi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n}$$

converge per

A: N.A.   B:  $x \leq 1$    C:  $x = 0$    D:  $x > 0$    E:  $1 < x$

3. Modulo e argomento del numero complesso  $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^4$  sono

A:  $(27, 2\pi)$    B:  $(3^4, \pi/2)$    C:  $(3^5, 0)$    D: N.A.   E:  $(9^2, 0)$

4. La funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = e^{x^2}$  è

A: surgettiva   B: monotona crescente   C: N.A.   D: non derivabile in  $x = 0$    E: iniettiva

5. La retta tangente al grafico di  $y(x) = \sin(3x)$  nel punto  $x_0 = \pi/12$  vale

A:  $-\frac{-12x+\pi-4}{4\sqrt{2}}$    B:  $3x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$    C: N.A.   D:  $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \pi/12)$    E:  $1 + x + x^2$

6. Una soluzione dell'equazione differenziale  $y'(x) = \sinh(x)$  è

A:  $\cosh(x) + 1$    B: N.E.   C:  $e^x - e^{-x}$    D:  $\frac{1}{\cos(x)}$    E: N.A.

7. L'integrale

$$\int_1^e \log(x) \frac{1}{x} dx$$

vale

A:  $\sqrt{e} + 1$    B: N.A.   C:  $\frac{1}{2}$    D:  $2/e$    E: 0

8. Data  $f(x) = (e^x)^x$ . Allora  $f'(1)$  è uguale a

A:  $e^2$    B:  $3e^3$    C:  $\log(2e)$    D:  $2e$    E: N.A.

9. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

valgono

A:  $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$    B: N.A.   C:  $\{0, 0, 2\pi, 2\pi\}$    D:  $\{\pi/3, N.E., \pi/3, N.E.\}$    E:  $\{0, 0, \pi/6, N.E.\}$

10. La funzione  $f(x) = \begin{cases} \sin(ax) & \text{per } x < 0 \\ x^2 + x & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$  è derivabile per

A: mai   B:  $a = 1$    C:  $a = k\pi$    D:  $a \in \mathbb{R}$    E: N.A.

Brutta copia

**CODICE=582612**

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica  
Prova di Analisi Matematica 1

25 febbraio 2014

- Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.
- **Tempo 30 minuti.** Durante la prova non si può uscire dall'aula.
- Non si possono consultare libri, appunti, manuali.
- Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.
- Consegnare solo il foglio risposte.
- Le risposte valide sono **SOLO** quelle segnate sul foglio che si consegna.
- Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.
- N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"
- Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.
- Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".
- Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere **CHIARAMENTE** e **INEQUIVOCABILMENTE** la risposta corretta a destra della linea stessa.

**CODICE=871306**



## PARTE A

1. Dato  $x \geq 0$ , la serie a termini non-negativi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n}$$

converge per

A:  $x \leq 1$    B:  $x = 0$    C: N.A.   D:  $1 < x$    E:  $x > 0$

2. La funzione  $f(x) = \begin{cases} \sin(ax) & \text{per } x < 0 \\ x^2 + x & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$  è derivabile per

A: mai   B: N.A.   C:  $a = k\pi$    D:  $a \in \mathbb{R}$    E:  $a = 1$

3. L'integrale

$$\int_1^e \log(x) \frac{1}{x} dx$$

vale

A:  $2/e$    B: N.A.   C:  $\sqrt{e} + 1$    D:  $\frac{1}{2}$    E: 0

4. La retta tangente al grafico di  $y(x) = \sin(3x)$  nel punto  $x_0 = \pi/12$  vale

A:  $-\frac{-12x+\pi-4}{4\sqrt{2}}$    B: N.A.   C:  $1 + x + x^2$    D:  $3x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$    E:  $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \pi/12)$

5. La funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = e^{x^2}$  è

A: N.A.   B: surgettiva   C: non derivabile in  $x = 0$    D: monotona crescente   E: iniettiva

6. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sin(x^2)}$$

vale

A: 0   B: N.E.   C:  $\frac{1}{2}$    D:  $+\infty$    E: N.A.

7. Modulo e argomento del numero complesso  $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^4$  sono

A:  $(3^4, \pi/2)$    B:  $(3^5, 0)$    C: N.A.   D:  $(9^2, 0)$    E:  $(27, 2\pi)$

8. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

valgono

A:  $\{0, 0, \pi/6, N.E.\}$    B: N.A.   C:  $\{0, 0, 2\pi, 2\pi\}$    D:  $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$    E:  $\{\pi/3, N.E., \pi/3, N.E.\}$

9. Data  $f(x) = (e^x)^x$ . Allora  $f'(1)$  è uguale a

A:  $3e^3$    B:  $\log(2e)$    C: N.A.   D:  $2e$    E:  $e^2$

10. Una soluzione dell'equazione differenziale  $y'(x) = \sinh(x)$  è

A:  $\cosh(x) + 1$    B:  $\frac{1}{\cos(x)}$    C:  $e^x - e^{-x}$    D: N.A.   E: N.E.

**CODICE=871306**

Brutta copia

**CODICE=871306**









Corso di Laurea in Ingegneria Informatica  
Prova di Analisi Matematica 1

25 febbraio 2014

**PARTE B**

1. Studiare il numero di soluzioni, al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$  della equazione

$$\lambda = \frac{2 - |x|}{1 + x}, \quad x \neq -1.$$

**Soluzione:** Per risolvere l'esercizio basta tracciare il grafico di  $f(x) = \frac{2 - |x|}{1 + x}$  e vedere quante volte interseca le rette orizzontali  $y = \lambda$ . Si ha immediatamente che i limiti agli estremi del dominio sono i seguenti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - |x|}{1 + x} &= 1 & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - |x|}{1 + x} &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2 - |x|}{1 + x} &= -\infty & \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2 - |x|}{1 + x} &= +\infty. \end{aligned}$$

Inoltre

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{(x+1)^2} & x > 0 \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & x < 0, x \neq -1 \end{cases}$$

e la derivata non esiste per  $x = 0$ , anche se la funzione è continua in  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . La funzione risulta decrescente in senso stretto in  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$ . Il grafico qualitativo è il seguente

da cui si ricava che esiste una sola soluzione se  $\lambda \leq -1$  e  $\lambda \geq 1$ , e 2 soluzioni per  $-1 < \lambda < 1$ .

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin(\pi t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

**Soluzione** Le soluzioni del problema omogeneo sono

$$Y(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t),$$

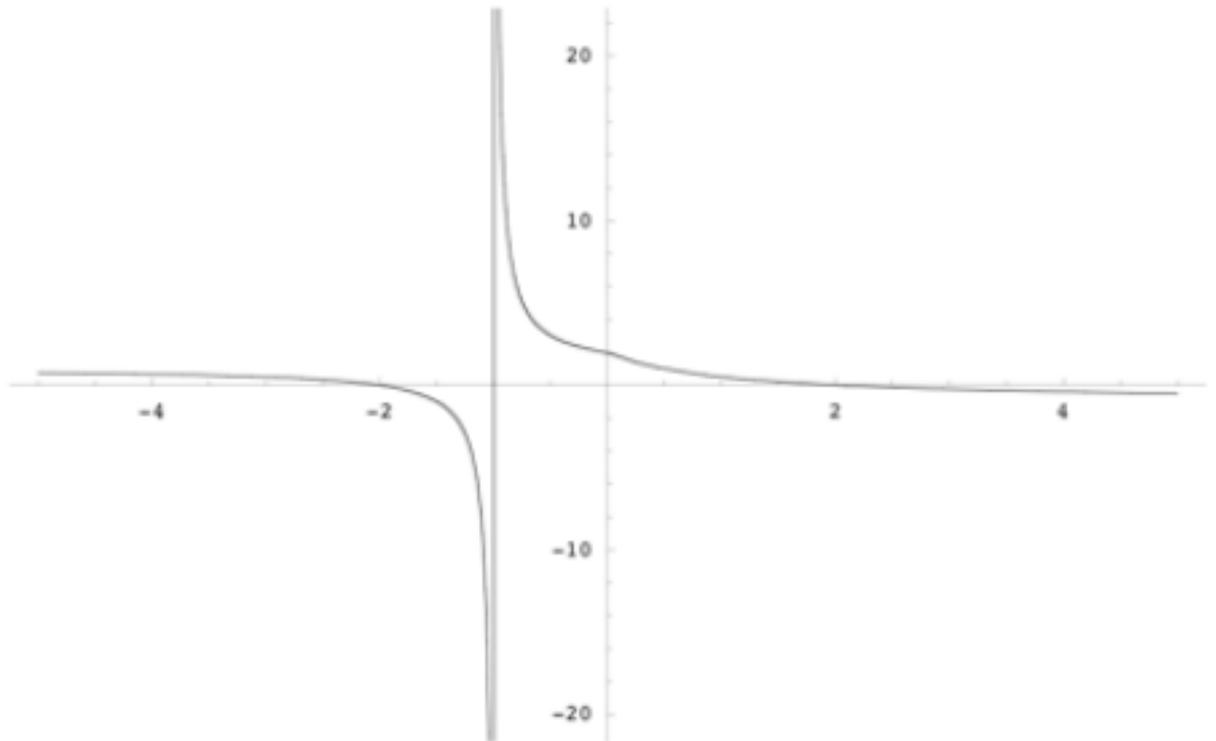


Figura 1: Grafico di  $f(x) = \frac{2|x|}{1+x}$

e quindi non c'è risonanza e la soluzione particolare va cercata della forma  $y_f(t) = a \sin(\pi t) + b \cos(\pi t)$ . Sostituendo si trova che

$$y_f(t) = \frac{1}{1 - \pi^2} \sin(\pi t)$$

e imponendo poi le condizioni iniziali

$$y(t) = \frac{(-1 + \pi^2) \cos(t) + \pi \sin(t) - \sin(\pi t)}{-1 + \pi^2}$$

3. Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_3^{+\infty} \frac{x}{(x-1)(x^2+9)} dx.$$

**Soluzione** L'integrale in questione converge dato che la funzione integranda è non-negativa e inoltre

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+9)} = \mathcal{O}(1/x^2).$$

Effettuando la scomposizione in fratti semplici del tipo

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+9)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+c}{x^2+9}$$

si trova che una primitiva è

$$G(x) = \frac{3}{10} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{10} \log(x-1) - \frac{1}{20} \log(x^2+9)$$

e quindi

$$\int_3^{+\infty} \frac{x}{(x-1)(x^2+9)} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} G(x) \Big|_3^b = \frac{1}{40} \left( 3\pi + \log \left( \frac{81}{4} \right) \right).$$

4. Calcolare l'integrale

$$\int_1^{3/2} \{x\} \log(x) dx$$

dove  $\{x\}$  è la parte frazionaria di  $x \in \mathbb{R}$ .

**Soluzione** Per calcolare l'integrale basta osservare che  $\{x\} = x - [x]$ , dove  $[x]$  è la parte intera di  $x$ . Nell'intervallo  $]1, 2[$  si ha quindi  $\{x\} = x - 1$  e pertanto

$$\int_1^{3/2} \{x\} \log(x) dx = \int_1^{3/2} (x-1) \log(x) dx$$

con una integrazione per parti si ha che

$$\frac{1}{2} \log(x)x^2 - \frac{x^2}{4} - \log(x)x + x$$

è una primitiva di  $(x-1) \log(x)$  e dunque

$$\int_1^{3/2} \{x\} \log(x) dx = \frac{1}{2} \log(x)x^2 - \frac{x^2}{4} - \log(x)x + x \Big|_1^{3/2} = \frac{3}{16} - \frac{3}{8} \log \left( \frac{3}{2} \right).$$