Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2013

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=764758

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2013

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 764758

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=764758

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{y : \ y = \mathrm{e}^{-x}\sin(x), \ x \in \mathbb{R}\}$$

valgono

A: N.A. B: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$ E: $\{\mathrm{e}, N.E., 1, 1\}$

2. In quanti punti si intersecano gli insiemi A e B definiti da

$$A := \{z \in \mathbb{C} : \ \|z - e^{i\pi}\| = 1\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : \ \|z - 1\| = 2\}.$$

A: 4 B: N.A. C: nessuno D: 1 E: infiniti

3. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{per } x < 0 \\ \sin(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

A: è derivabile, ma non continua. B: N.A. C: non è né continua né derivabile. D: è continua, ma non derivabile. E: è continua e derivabile.

4. Data $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$. Allora $f'''(0)$ è uguale a

A: N.A. B: 0 C: -1 D: π E: 2

5. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$ è

A: iniettiva B: monotona decrescente C: monotona crescente D: sempre non negativa E: N.A.

6. Modulo e argomento del numero complesso $z = \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono

A: $(1, -\pi/6)$ B: N.A. C: $(1, 5\pi/6)$ D: $(2, 5\pi/3)$ E: $(1, 4\pi/3)$

7. L'integrale

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(x)|\, dx$$

vale

A: 2 B: 20 C: 0 D: N.A. E: 2π

8. Sia $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ se $x \neq 0$, con $f(0) = 0$, allora

A: $f'(0) = 2$ B: N.A. C: f non è derivabile in 0 D: $f'(0) = 0$ E: $f'(0) = 1$

9. Dire se la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \sin\left(\frac{1}{n!}\right)$$

A: è indeterminata B: è a segni alterni C: converge D: N.A. E: diverge

10. Il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\arctan(x))}{x}$$

vale

A: 0 B: N.E. C: N.A. D: π E: $-\infty$

CODICE=764758

Brutta Copia

CODICE=764758

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2013

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=061563

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2013

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 061563

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=061563

PARTE A

1. Data $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$. Allora $f'''(0)$ è uguale a

   A: -1 B: 2 C: π D: N.A. E: 0

2. Sia $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ se $x \neq 0$, con $f(0) = 0$, allora

   A: $f'(0) = 2$ B: $f'(0) = 1$ C: $f'(0) = 0$ D: N.A. E: f non è derivabile in 0

3. L'integrale

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(x)|\, dx$$

   vale

   A: 0 B: 2 C: 20 D: 2π E: N.A.

4. In quanti punti si intersecano gli insiemi A e B definiti da

$$A := \{z \in \mathbb{C} : \ \|z - e^{i\pi}\| = 1\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : \ \|z - 1\| = 2\}.$$

   A: nessuno B: 1 C: 4 D: infiniti E: N.A.

5. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{per } x < 0 \\ \sin(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: N.A. B: è continua, ma non derivabile. C: è continua e derivabile. D: non è né continua né derivabile. E: è derivabile, ma non continua.

6. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{y : \ y = \mathrm{e}^{-x} \sin(x), \ x \in \mathbb{R}\}$$

   valgono

   A: N.A. B: $\{\mathrm{e}, N.E., 1, 1\}$ C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$ E: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$

7. La funzione $f : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$ è

   A: monotona decrescente B: N.A. C: sempre non negativa D: iniettiva E: monotona crescente

8. Modulo e argomento del numero complesso $z = \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono

   A: $(1, 4\pi/3)$ B: $(1, -\pi/6)$ C: $(2, 5\pi/3)$ D: $(1, 5\pi/6)$ E: N.A.

9. Dire se la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \sin\left(\frac{1}{n!}\right)$$

   A: converge B: è indeterminata C: diverge D: è a segni alterni E: N.A.

10. Il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\arctan(x))}{x}$$

   vale

   A: $-\infty$ B: N.E. C: N.A. D: 0 E: π

CODICE=061563

Brutta Copia

CODICE=061563

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2013

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=909518

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2013

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 909518

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=909518

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{y : \ y = \mathrm{e}^{-x}\sin(x), \ x \in \mathbb{R}\}$$

valgono

A: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$ B: $\{\mathrm{e}, N.E., 1, 1\}$ C: N.A. D: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ E: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$

2. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{per } x < 0 \\ \sin(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

A: è continua, ma non derivabile. B: è continua e derivabile. C: non è né continua né derivabile. D: N.A. E: è derivabile, ma non continua.

3. L'integrale

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(x)|\, dx$$

vale

A: 0 B: 2 C: N.A. D: 20 E: 2π

4. Dire se la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \sin\left(\frac{1}{n!}\right)$$

A: è a segni alterni B: converge C: N.A. D: è indeterminata E: diverge

5. In quanti punti si intersecano gli insiemi A e B definiti da

$$A := \{z \in \mathbb{C} : \ \|z - e^{i\pi}\| = 1\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : \ \|z - 1\| = 2\}.$$

A: nessuno B: infiniti C: 4 D: 1 E: N.A.

6. Data $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$. Allora $f'''(0)$ è uguale a

A: 0 B: -1 C: 2 D: N.A. E: π

7. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$ è

A: iniettiva B: sempre non negativa C: N.A. D: monotona decrescente E: monotona crescente

8. Sia $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ se $x \neq 0$, con $f(0) = 0$, allora

A: $f'(0) = 0$ B: $f'(0) = 1$ C: f non è derivabile in 0 D: N.A. E: $f'(0) = 2$

9. Modulo e argomento del numero complesso $z = \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono

A: $(2, 5\pi/3)$ B: N.A. C: $(1, 4\pi/3)$ D: $(1, -\pi/6)$ E: $(1, 5\pi/6)$

10. Il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\arctan(x))}{x}$$

vale

A: 0 B: N.E. C: N.A. D: π E: $-\infty$

CODICE=909518

Brutta Copia

CODICE=909518

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2013

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=947706

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2013

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 947706

A	B	C	D	E

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=947706

PARTE A

1. Sia $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ se $x \neq 0$, con $f(0) = 0$, allora

   A: $f'(0) = 2$ B: $f'(0) = 1$ C: f non è derivabile in 0 D: N.A. E: $f'(0) = 0$

2. Data $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$. Allora $f'''(0)$ è uguale a

   A: π B: -1 C: 2 D: N.A. E: 0

3. Il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\arctan(x))}{x}$$

   vale

   A: π B: $-\infty$ C: N.A. D: 0 E: N.E.

4. L'integrale

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(x)| \, dx$$

   vale

   A: 20 B: 2π C: N.A. D: 0 E: 2

5. Modulo e argomento del numero complesso $z = \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono

   A: $(1, 4\pi/3)$ B: N.A. C: $(1, -\pi/6)$ D: $(2, 5\pi/3)$ E: $(1, 5\pi/6)$

6. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{per } x < 0 \\ \sin(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: non è né continua né derivabile. B: è continua e derivabile. C: N.A. D: è continua, ma non derivabile. E: è derivabile, ma non continua.

7. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{y : \ y = \mathrm{e}^{-x} \sin(x), \ x \in \mathbb{R}\}$$

   valgono

   A: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{\mathrm{e}, N.E., 1, 1\}$ D: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ E: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$

8. Dire se la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \sin\left(\frac{1}{n!}\right)$$

   A: N.A. B: è a segni alterni C: diverge D: è indeterminata E: converge

9. In quanti punti si intersecano gli insiemi A e B definiti da

$$A := \{z \in \mathbb{C} : \ \|z - e^{i\pi}\| = 1\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : \ \|z - 1\| = 2\}.$$

   A: 4 B: N.A. C: 1 D: infiniti E: nessuno

10. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$ è

    A: sempre non negativa B: monotona crescente C: N.A. D: monotona decrescente E: iniettiva

CODICE=947706

Brutta Copia

CODICE=947706

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2013

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=134299

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2013

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 134299

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=134299

PARTE A

1. Dire se la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \sin\left(\frac{1}{n!}\right)$$
A: converge B: diverge C: è a segni alterni D: N.A. E: è indeterminata

2. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{y : \ y = \mathrm{e}^{-x}\sin(x), \ x \in \mathbb{R}\}$$
valgono
A: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ D: $\{\mathrm{e}, N.E., 1, 1\}$ E: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$

3. Data $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$. Allora $f'''(0)$ è uguale a
A: -1 B: 2 C: 0 D: N.A. E: π

4. Sia $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ se $x \neq 0$, con $f(0) = 0$, allora
A: f non è derivabile in 0 B: $f'(0) = 0$ C: N.A. D: $f'(0) = 1$ E: $f'(0) = 2$

5. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{per } x < 0 \\ \sin(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$
A: è derivabile, ma non continua. B: è continua, ma non derivabile. C: non è né continua né derivabile. D: N.A. E: è continua e derivabile.

6. L'integrale
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(x)|\, dx$$
vale
A: 2π B: 20 C: 0 D: 2 E: N.A.

7. In quanti punti si intersecano gli insiemi A e B definiti da
$$A := \{z \in \mathbb{C} : \ \|z - e^{i\pi}\| = 1\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : \ \|z - 1\| = 2\}.$$
A: N.A. B: nessuno C: 1 D: 4 E: infiniti

8. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$ è
A: sempre non negativa B: monotona crescente C: monotona decrescente D: iniettiva E: N.A.

9. Il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\arctan(x))}{x}$$
vale
A: π B: N.E. C: N.A. D: 0 E: $-\infty$

10. Modulo e argomento del numero complesso $z = \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono
A: $(1, 4\pi/3)$ B: $(1, 5\pi/6)$ C: $(2, 5\pi/3)$ D: $(1, -\pi/6)$ E: N.A.

CODICE=134299

Brutta Copia

CODICE=134299

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2013

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 764758

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	●	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	●	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	○	●	○	○

CODICE=764758

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2013

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

CODICE = 061563

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	○	○	●
3	○	●	○	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	●	○	○	○
6	○	○	●	○	○
7	○	○	●	○	○
8	○	○	○	●	○
9	○	○	●	○	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=061563

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2013

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 909518

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	●	○	○	○	○
3	○	●	○	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	●	○	○	○	○
7	○	●	○	○	○
8	○	○	●	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	○	●	○	○

CODICE=909518

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2013

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 947706

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	●	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	●	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	●	○	○
9	○	●	○	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=947706

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2013

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 134299

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	●	○	○
4	●	○	○	○	○
5	○	●	○	○	○
6	○	○	○	●	○
7	●	○	○	○	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	●	○	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=134299

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2013

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni di

$$x \log^2(x) - \lambda = 0$$

Soluzione: Studiamo la funzione $f(x) = x\log^2(x)$ con dominio $(0, \infty)$. Abbiamo che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Inoltre si ha

$$f'(x) = \log^2(x) + 2\log x$$

Quindi gli zeri di f' sono x_0, x_1 tali che $\log x_0 = 0$ e $\log x_1 = -2$, quindi $x_0 = 1$ e $x_1 = e^{-2}$. Inoltre dallo studio del segno di f' si deduce che f è crescente su $(0, e^{-2})$, decrescente su $(e^{-2}, 1]$ e crescente tra $(1, \infty)$. In particolare 1 è un punto di minimo locale (con valore di minimo uguale a 0) ed e^{-2} è punto di massimo locale per f. Dal grafico della funzione f si

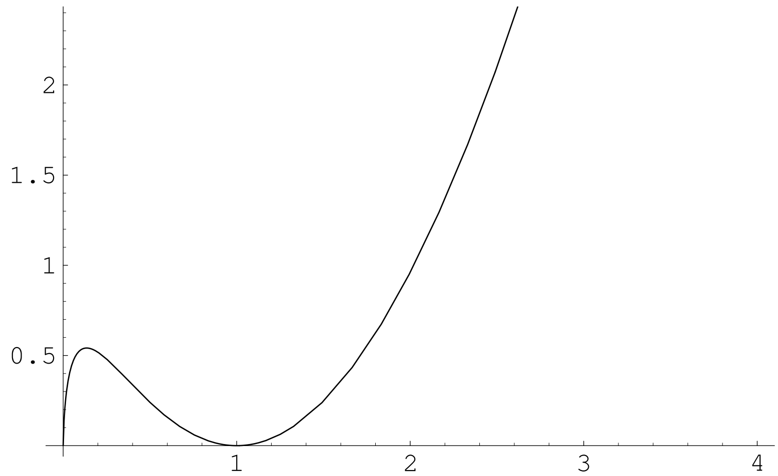

Figura 1: Grafico di $f(x) = x\log^2(x)$

deduce che le soluzione dell' equazione

$$x \log^2(x) - \lambda = 0,$$

sono:

CODICE=134299

(a) nessuna se $\lambda < 0$,

(b) 1 se $\lambda \in (4\mathrm{e}^{-2}, \infty) \cup \{0\}$,

(c) 2 se $\lambda = 4\mathrm{e}^{-2}$,

(d) 3 se $\lambda \in (0, 4\mathrm{e}^{-2})$.

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(t) - y'(t) = t + 1, \\ y(0) = a, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione: La soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$c_1 + c_2\mathrm{e}^t + c_3\mathrm{e}^{-t}$$

Essendo 0 una soluzione dell'equazione caratteristica $\lambda^3 - \lambda = 0$ associata all'equazione, cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$y_f(t) = t(bt + c).$$

Osserviamo che $y_f(t)$ risolve l'equazione se e solo se

$$-2bt - c = 1 + t,$$

ossia $c = -1, b = -1/2$ e quindi $y(t) = -1/2t^2 - t$ è la soluzione particolare. Otteniamo quindi che la soluzione generale dell'equazione è data da

$$y(t) = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t} - 1/2t^2 - t.$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali ed otteniamo

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = a \\ c_2 - c_3 - 1 = 0 \\ c_2 + c_3 - 1 = 0. \end{cases}$$

Quindi deduciamo dalle ultime due equazioni $c_3 + 1 = 1 - c_3$ ossia $c_3 = 0$. Dalla seconda equazione ricaviamo che $c_2 = 1$ e quindi dalla prima $c_1 = a - 1$. Quindo la soluzione è

$$(a - 1) + e^t - 1/2t^2 - t.$$

3. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x^2 \log(x)}{x^2 + 1} \right)^n$$

converge.

Soluzione: Dalla teoria delle serie geometriche segue che la serie converge se e solo se

$$\left| \frac{x^2 \log x}{x^2 + 1} \right| < 1.$$

CODICE=134299

Ciò equivale alle condizioni

$$x^2(\log x) < 1 + x^2, \qquad \text{se } x \geq 1,$$

$$-x^2 \log x < 1 + x^2, \qquad \text{se } 0 < x < 1.$$

Introduciamo quindi le funzioni

$$f_1(x) = x^2 \log x - 1 - x^2, \qquad \text{se } x \geq 1$$

$$f_2(x) = -x^2 \log x - 1 - x^2, \qquad \text{se } 0 < x < 1,$$

allora gli $x \in \mathbb{R}^+$ per cui la serie converge sono dati da $\{x : \ f_1 < 0\} \cup \{x : \ f_2 < 0\}$. Per descrivere $\{x : \ f_1 < 0\}$ studiamo la funzione f_1 su $[1, \infty)$. Si ha che

$$f_1(1) = -2 \qquad \lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$$

ed inoltre

$$f_1'(x) = 2x \log x + x - 2x = 2x \log x - x.$$

Quindi f_1' si annulla nel punto $x_1 > 1$ dato dalla condizione $\log x_1 = \frac{1}{2}$ cioè $x_1 = e^{1/2}$. Da ciò si deduce che f_1 è decrescente su $(1, x_1)$ e crescente su (x_1, ∞).

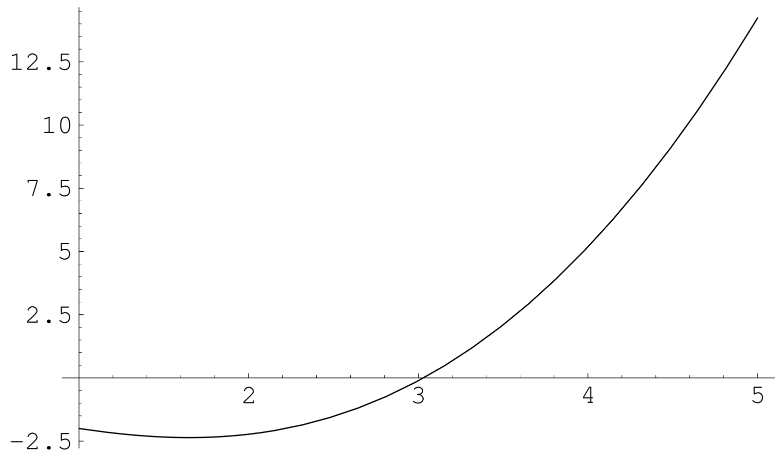

Figura 2: Grafico di $f_1(x) = x^2 \log x - 1 - x^2$ per $x > 1$

Tracciando il grafico di $f_1(x)$ si deduce che $\{x : f_1(x) < 0\} = (1, y_1)$ dove $f_1(y_1) = 0$. (Si può stimare che e $< y_1 < e^2$).

Per descrivere l' insieme $\{x : \ f_2 < 0\}$ studiamo f_2 su $(0, 1)$. Si ha che

$$\lim_{x \to 1^-} f_2(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 0^+} f_2(x) = -1$$

ed inoltre

$$f_2'(x) = -2x \log x - x - 2x = -2x \log x - 3x$$

Osserviamo che f_2' si annulla in x_1 dato da $\log x_1 = -\frac{3}{2}$ ossia $x_2 = e^{-\frac{3}{2}}$. Inoltre f_2 è crescente su $(0, x_2)$ e decresce su $(x_2, 1)$ quindi x_2 è il punto di massimo relativo di f_2 su $(0, 1)$ ed inoltre

$$f_2(e^{-\frac{3}{2}}) = -e^{-3} \log(e^{-\frac{3}{2}}) - 1 - e^{-3} = \frac{e^{-3}}{2} - 1 < 0.$$

Da ciò deduciamo che $\{x : \ f_2 < 0\} = (0, 1)$.

Complessivamente, la serie converge per $x \in [0, y_1)$, dove y_1 è definito dalla relazione $f_1(y_1) = 0$.

CODICE=134299

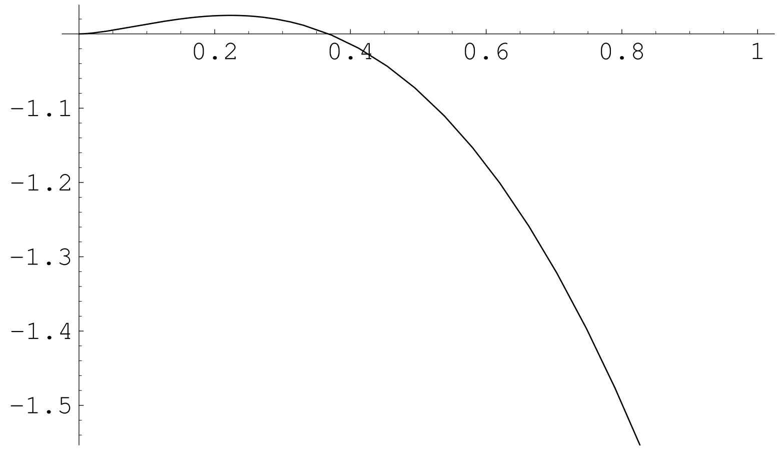

Figura 3: Grafico di $f_2(x) = -x^2 \log x - 1 - x^2$ per $0 < x < 1$

4. Sia $f \in C^4(\mathbb{R})$, calcolare il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}.$$

Se la funzione è solo di classe $C^1(\mathbb{R})$ che succede?

Soluzione: Dalla formula di Taylor si ha che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + o(h^2),$$

e anche

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + o(h^2).$$

Sommando le due relazioni e dividendo per h^2 otteniamo

$$\frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f''(x_0) + \frac{o(h^2)}{h^2}.$$

Quindi il limite assegnato esiste e vale a $f''(x_0)$ (nei calcoli in realtà abbiamo usato solo che f è derivabile due volte in x_0 e ovviamente una volta in un suo intorno).

Se f è solo C^1 il limite potrebbe non esistere. Ad esempio possiamo scegliere la funzione $f(x) = x^{3/2} \sin\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right)$ per $x > 0$, $f(x) = 0$ per $x \leq 0$ (che è di classe C^1) ed $x_0 = 0$. Notiamo che

$$f(h) + f(-h) = \sin\left(\frac{1}{|h|^{\frac{1}{4}}}\right)|h|^{3/2}$$

Quindi, tenuto conto che $f(0) = 0$, deduciamo che

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2} = \lim_{h \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{h^{\frac{1}{4}}}\right)\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}$$

e il limite non esiste.

Il limite comunque può esistere ed essere finito anche se la derivata seconda in x_0 non esiste, come si vede analizzando il caso $f(x) = x|x|$.

CODICE=134299