Corso di Laurea in Ingegneria Informatica & Telecomunicazioni
Prova di Analisi Matematica 1

7 luglio 2011

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=786610

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 786610

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=786610

PARTE A

1. L'integrale
$$\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{\log(x)x}\, dx$$
vale

   A: $\log(1/2)$ B: $\log(\log(2))$ C: N.A. D: $-\log(\log(2))$ E: N.E.

2. La funzione $f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-(t-1)^2}\, dt$ è convessa per

   A: N.A. B: $x \in \mathbb{R}$ C: $x \leq 1$ D: $x > 0$ E: $-\mathrm{e} < x < \mathrm{e}$

3. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{k \in \mathbb{R} :\ \mathrm{e}^{kx} \text{ è integrabile in senso generalizzato su } [0, +\infty]\}$$
valgono

   A: $\{-\infty, N.E., 0, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{-1, N.E., 1, 1\}$ E: $\{-\infty, N.E., 0, 0\}$

4. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 2$ della funzione $f(x) = \cos(\log(x/2))$ vale

   A: N.A. B: $1 - \frac{1}{8}(x-2)^2$ C: $-\frac{1}{2}(\log(x/2))x^2$ D: $-\frac{(\pi x)^2}{4}$ E: $1 - \frac{1}{8}x^2$

5. La funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \mathrm{e}^{2\log|x|}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è

   A: monotona crescente B: iniettiva C: concava D: N.A. E: limitata

6. Il limite
$$\lim_{m \to +\infty} \sqrt{m} \int_0^{\pi} \cos(mx)\, dx$$
vale

   A: $+\infty$ B: N.E. C: 0 D: N.A. E: 1

7. Data $f(x) = [\log_3(x)]^{\log(x)}$. Allora $f'(\mathrm{e})$ è uguale a

   A: N.A. B: $1/\mathrm{e}$ C: 2^{e} D: N.E. E: $\log(e)$

8. Dato $x \in \mathbb{R}$, la serie a termini non-negativi
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{kx}}{k}$$
converge per

   A: N.A. B: $0 < x$ C: $x \leq 0$ D: $x < 0$ E: Solo per $x = 0$

9. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = 2\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ è

   A: $2\log(\cosh(x))$ B: $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ C: N.E. D: N.A. E: $\frac{1}{\cos(x)}$

10. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(\frac{2}{i}\right)^{-7}$ sono

    A: $(1/128, \pi/2)$ B: N.A. C: $(2, \pi)$ D: $(1/128, -\pi/2)$ E: $(128, \pi/2)$

CODICE=786610

Brutta Copia

CODICE=786610

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica & Telecomunicazioni
Prova di Analisi Matematica 1

7 luglio 2011

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=995048

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 995048

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=995048

PARTE A

1. Dato $x \in \mathbb{R}$, la serie a termini non-negativi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{kx}}{k}$$

converge per

A: N.A. B: $x \leq 0$ C: $0 < x$ D: $x < 0$ E: Solo per $x = 0$

2. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 2$ della funzione $f(x) = \cos(\log(x/2))$ vale

A: $1 - \frac{1}{8}x^2$ B: $-\frac{1}{2}(\log(x/2))x^2$ C: N.A. D: $-\frac{(\pi x)^2}{4}$ E: $1 - \frac{1}{8}(x-2)^2$

3. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \mathrm{e}^{2\log|x|}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è

A: N.A. B: monotona crescente C: iniettiva D: limitata E: concava

4. Il limite

$$\lim_{m \to +\infty} \sqrt{m} \int_0^{\pi} \cos(mx)\, dx$$

vale

A: N.A. B: N.E. C: 0 D: 1 E: $+\infty$

5. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = 2\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ è

A: $\frac{1}{\cos(x)}$ B: N.A. C: $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ D: $2\log(\cosh(x))$ E: N.E.

6. L'integrale

$$\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{\log(x)x}\, dx$$

vale

A: $\log(1/2)$ B: $-\log(\log(2))$ C: N.E. D: N.A. E: $\log(\log(2))$

7. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(\frac{2}{i}\right)^{-7}$ sono

A: $(1/128, \pi/2)$ B: $(128, \pi/2)$ C: $(1/128, -\pi/2)$ D: $(2, \pi)$ E: N.A.

8. Data $f(x) = [\log_3(x)]^{\log(x)}$. Allora $f'(\mathrm{e})$ è uguale a

A: 2^{e} B: N.A. C: $\log(e)$ D: N.E. E: $1/\mathrm{e}$

9. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{k \in \mathbb{R} : \ \mathrm{e}^{kx} \text{ è integrabile in senso generalizzato su } [0, +\infty]\}$$

valgono

A: $\{-\infty, N.E., 0, 0\}$ B: $\{-\infty, N.E., 0, N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{-1, N.E., 1, 1\}$
E: N.A.

10. La funzione $f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-(t-1)^2}\, dt$ è convessa per

A: $x \in \mathbb{R}$ B: $x > 0$ C: $-\mathrm{e} < x < \mathrm{e}$ D: $x \leq 1$ E: N.A.

CODICE=995048

Brutta Copia

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica & Telecomunicazioni
Prova di Analisi Matematica 1

7 luglio 2011

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=019693

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 019693

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=019693

PARTE A

1. La funzione $f(x) = \int_0^x e^{-(t-1)^2}\, dt$ è convessa per

   A: $x > 0$ B: $-e < x < e$ C: N.A. D: $x \leq 1$ E: $x \in \mathbb{R}$

2. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 2$ della funzione $f(x) = \cos(\log(x/2))$ vale

   A: $-\frac{1}{2}(\log(x/2))x^2$ B: $1 - \frac{1}{8}(x-2)^2$ C: N.A. D: $1 - \frac{1}{8}x^2$ E: $-\frac{(\pi x)^2}{4}$

3. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{k \in \mathbb{R} : \ e^{kx} \text{ è integrabile in senso generalizzato su } [0, +\infty]\}$$

   valgono

   A: $\{-1, N.E., 1, 1\}$ B: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., 0, 0\}$ D: $\{-\infty, N.E., 0, N.E.\}$ E: N.A.

4. Dato $x \in \mathbb{R}$, la serie a termini non-negativi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{kx}}{k}$$

   converge per

   A: N.A. B: $0 < x$ C: $x < 0$ D: $x \leq 0$ E: Solo per $x = 0$

5. L'integrale

$$\int_2^e \frac{1}{\log(x)x}\, dx$$

   vale

   A: $-\log(\log(2))$ B: $\log(\log(2))$ C: $\log(1/2)$ D: N.E. E: N.A.

6. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = 2\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ è

   A: N.E. B: $2\log(\cosh(x))$ C: $\frac{1}{\cos(x)}$ D: N.A. E: $e^x - e^{-x}$

7. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{2\log|x|}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è

   A: limitata B: monotona crescente C: iniettiva D: concava E: N.A.

8. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(\frac{2}{i}\right)^{-7}$ sono

   A: $(1/128, -\pi/2)$ B: $(128, \pi/2)$ C: N.A. D: $(2, \pi)$ E: $(1/128, \pi/2)$

9. Data $f(x) = [\log_3(x)]^{\log(x)}$. Allora $f'(e)$ è uguale a

   A: N.A. B: N.E. C: 2^e D: $1/e$ E: $\log(e)$

10. Il limite

$$\lim_{m \to +\infty} \sqrt{m} \int_0^{\pi} \cos(mx)\, dx$$

   vale

   A: $+\infty$ B: N.E. C: 1 D: 0 E: N.A.

CODICE=019693

Brutta Copia

CODICE=019693

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica & Telecomunicazioni
Prova di Analisi Matematica 1

7 luglio 2011

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=442465

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 442465

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=442465

PARTE A

1. La funzione $f(x) = \int_0^x e^{-(t-1)^2}\, dt$ è convessa per

   A: N.A. B: $x \leq 1$ C: $x \in \mathbb{R}$ D: $-e < x < e$ E: $x > 0$

2. Data $f(x) = [\log_3(x)]^{\log(x)}$. Allora $f'(e)$ è uguale a

   A: 2^e B: $\log(e)$ C: N.E. D: N.A. E: $1/e$

3. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(\frac{2}{i}\right)^{-7}$ sono

   A: $(1/128, -\pi/2)$ B: $(128, \pi/2)$ C: $(2, \pi)$ D: $(1/128, \pi/2)$ E: N.A.

4. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A = \{k \in \mathbb{R} : \ e^{kx} \text{ è integrabile in senso generalizzato su } [0, +\infty]\}$$

   valgono

   A: N.A. B: $\{-\infty, N.E., 0, 0\}$ C: $\{-\infty, N.E., 0, N.E.\}$ D: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ E: $\{-1, N.E., 1, 1\}$

5. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{2\log|x|}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è

   A: iniettiva B: monotona crescente C: N.A. D: limitata E: concava

6. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = 2\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ è

   A: N.E. B: $\frac{1}{\cos(x)}$ C: N.A. D: $e^x - e^{-x}$ E: $2\log(\cosh(x))$

7. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 2$ della funzione $f(x) = \cos(\log(x/2))$ vale

   A: N.A. B: $-\frac{1}{2}(\log(x/2))x^2$ C: $1 - \frac{1}{8}x^2$ D: $-\frac{(\pi x)^2}{4}$ E: $1 - \frac{1}{8}(x-2)^2$

8. L'integrale

   $$\int_2^e \frac{1}{\log(x)x}\, dx$$

   vale

   A: N.E. B: $\log(\log(2))$ C: N.A. D: $\log(1/2)$ E: $-\log(\log(2))$

9. Dato $x \in \mathbb{R}$, la serie a termini non-negativi

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{kx}}{k}$$

   converge per

   A: $x \leq 0$ B: $0 < x$ C: Solo per $x = 0$ D: $x < 0$ E: N.A.

10. Il limite

    $$\lim_{m \to +\infty} \sqrt{m} \int_0^{\pi} \cos(mx)\, dx$$

    vale

    A: N.E. B: $+\infty$ C: 1 D: 0 E: N.A.

CODICE=442465

Brutta Copia

CODICE=442465

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica & Telecomunicazioni
Prova di Analisi Matematica 1

7 luglio 2011

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=594763

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 594763

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=594763

PARTE A

1. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = 2\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ è

   A: $2\log(\cosh(x))$ B: N.E.   C: $e^x - e^{-x}$ D: N.A.   E: $\frac{1}{\cos(x)}$

2. Il limite
$$\lim_{m\to+\infty} \sqrt{m}\int_0^\pi \cos(mx)\,dx$$
   vale

   A: N.A.   B: 0   C: N.E.   D: $+\infty$ E: 1

3. L'integrale
$$\int_2^e \frac{1}{\log(x)x}\,dx$$
   vale

   A: $\log(\log(2))$ B: N.E.   C: N.A.   D: $\log(1/2)$ E: $-\log(\log(2))$

4. La funzione $f(x) = \int_0^x e^{-(t-1)^2}\,dt$ è convessa per

   A: $x > 0$ B: $-e < x < e$ C: $x \leq 1$ D: $x \in \mathbb{R}$ E: N.A.

5. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 2$ della funzione $f(x) = \cos(\log(x/2))$ vale

   A: $1 - \frac{1}{8}x^2$ B: $-\frac{1}{2}(\log(x/2))x^2$ C: $-\frac{(\pi x)^2}{4}$ D: $1 - \frac{1}{8}(x-2)^2$ E: N.A.

6. Data $f(x) = [\log_3(x)]^{\log(x)}$. Allora $f'(e)$ è uguale a

   A: $1/e$ B: N.E.   C: $\log(e)$ D: 2^e E: N.A.

7. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{k \in \mathbb{R} : \ e^{kx} \text{ è integrabile in senso generalizzato su } [0, +\infty]\}$$
   valgono

   A: $\{-\infty, N.E., 0, N.E.\}$ B: $\{-\infty, N.E., 0, 0\}$ C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{-1, N.E., 1, 1\}$
   E: N.A.

8. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(\frac{2}{i}\right)^{-7}$ sono

   A: $(1/128, \pi/2)$ B: $(128, \pi/2)$ C: $(2, \pi)$ D: N.A.   E: $(1/128, -\pi/2)$

9. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{2\log|x|}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è

   A: monotona crescente   B: N.A.   C: limitata   D: iniettiva   E: concava

10. Dato $x \in \mathbb{R}$, la serie a termini non-negativi
$$\sum_{k=1}^\infty \frac{2^{kx}}{k}$$
    converge per

    A: $x < 0$ B: Solo per $x = 0$ C: N.A.   D: $x \leq 0$ E: $0 < x$

CODICE=594763

Brutta Copia

CODICE=594763

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 786610

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	●	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	●	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	○	●	○
9	●	○	○	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=786610

CODICE=786610

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 995048

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	○	○	●
3	●	○	○	○	○
4	○	○	●	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	●	○	○	○
7	○	○	●	○	○
8	○	●	○	○	○
9	○	●	○	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=995048

CODICE=995048

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 019693

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	●	○	○
5	●	○	○	○	○
6	○	●	○	○	○
7	○	○	○	○	●
8	●	○	○	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=019693

CODICE=019693

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 442465

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	○	○	●	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	●	○	○
5	○	○	●	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	●	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=442465

CODICE=442465

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 594763

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	○	●
4	○	○	●	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	○	○	●
7	●	○	○	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	●	○	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=594763

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica & Telecomunicazioni
Prova di Analisi Matematica 1

7 luglio 2011

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\lambda > 0$, il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda x}} & x > 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

Soluzione: La funzione f risulta definita per ogni x ed è continua in zero, visto che

$$\lim_{x\to 0^+} x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda x}} = \lim_{x\to 0^-} -x^2 = 0.$$

In particolare il limite da destra risulta indipendente da λ. Agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Per studiare crescenza e decrescenza osserviamo che

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x\lambda}}(x\lambda+1)}{x\lambda} & x > 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

e per verificare la continuità in zero osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x\lambda}}(x\lambda+1)}{x\lambda} = 0,$$

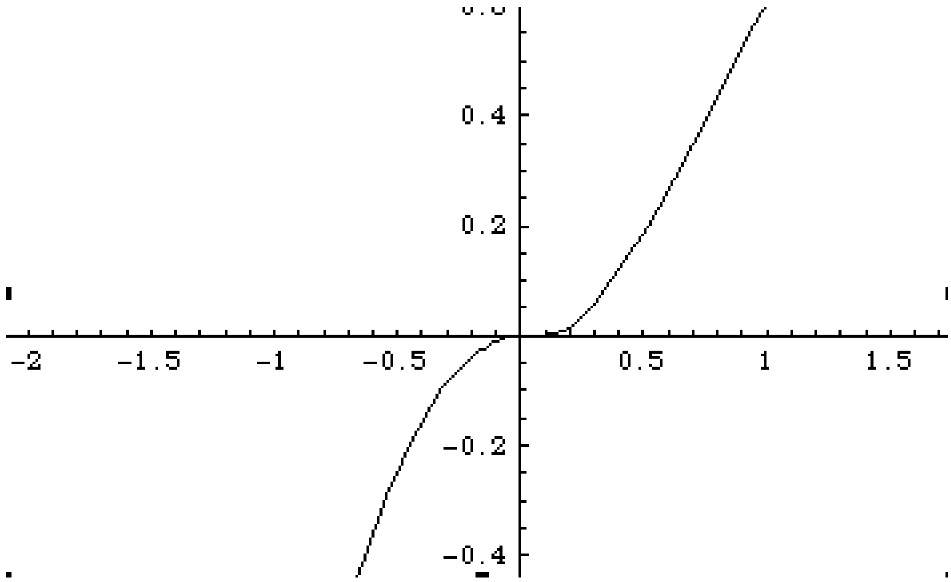
come deriva dallo studio dei limiti notevoli.

Inoltre $f' > 0$ in tutti gli altri punti, quindi la funzione è strettamente crescente. La derivata seconda risulta

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x\lambda}}}{x^3\lambda^2} & x > 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$$

e pertanto la funzione non è derivabile per $x = 0$, dato che $\lim_{x\to 0^+} f''(x) = 0$. Inoltre $f'' < 0$ per $x < 0$ e $f'' > 0$ per $x > 0$.

CODICE=594763



2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + t\,y(t) = \cos(t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione Si tratta di una equazione lineare. Usando il fattore integrante $\mathrm{e}^{t^2/2}$ si ottiene

$$(y'(t) + t\,y(t))\mathrm{e}^{t^2/2} = \frac{d}{dt} y(t)\mathrm{e}^{t^2/2} = \cos(t)$$

e quindi integrando la soluzione

$$y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}(\sin(t) + 1).$$

3. Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare

$$\int_0^{+\infty} (1 - 2x - 2x^2)\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$$

Soluzione L'integrale converge assolusamente perchè l'esponenziale si annulla all'infinito più rapidamente di ogni potenza di x. Tramite integrazioni per parti una primitiva risulta essere $e^{-x}\left(2x^2 + 6x + 5\right)$ e calcolando esplicitamente l'integrale si ha $\int_0^{+\infty} (1 - 2x - 2x^2)\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = -5$.

4. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $-2 \leq f'' \leq -1$. Dimostrare che
   - i) $0 \leq f(1) \leq 1/2$
   - ii) $1/6 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq 1/3$

Soluzione Usando la formula di Taylor col resto di Lagrange si ottiene

$$x - x^2 \leq f(x) \leq x - \frac{1}{2}x^2.$$

Sostituendo $x = 1$ si ottiene la *i)*, mentre integrando si ottiene la *ii)*.

CODICE=594763