Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

22 luglio 2010

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=649733

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 649733

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=649733

PARTE A

1. Se $z \in \mathbb{C}$ è tale che $z^4 = -16$ allora l'argomento di z è uguale a

   A: $\{\pi/4, \pi/4+\pi, \pi/4+2\pi, \pi/4+3\pi\}$ B: N.A. C: $\{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$ D: $\{\pi/4, 2\pi/4, 3\pi/4, \pi\}$ E: $\{\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4, 9\pi/4\}$

2. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + x^2$ è

   A: N.A. B: sempre non negativa C: limitata D: monotona decrescente E: iniettiva

3. La serie geometrica
$$\sum_{n=0}^{\infty} (1/2 + q^3)^n$$
   converge per

   A: $|q| < 1$ B: N.A. C: $q \in]\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}, \frac{1}{2^{1/3}}[$ D: $q \in]-1/2, 1/2[$ E: $-1 < q < 2^{1/3}$

4. Sia y soluzione di $y'(x) = 4^{\pi} y(x)$, $y(0) = 0$. Allora $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ è uguale a

   A: N.A. B: 0 C: N.E. D: $+\infty$ E: π^4

5. L'integrale
$$\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\, dx$$
   vale

   A: N.A. B: 1/2 C: -1 D: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E: 1

6. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cos(1/x^2)$$
   vale

   A: N.E. B: 1 C: 0 D: N.A. E: $+\infty$

7. Il polinomio di Taylor di grado 5 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \sin(x^2)$ vale

   A: $1 + \sin(x)\frac{x^4}{4!}$ B: $1 + x$ C: x^2 D: N.A. E: $1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

8. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{n \in \mathbb{N} : \text{la funzione } x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ è convessa}\}$$
   valgono

   A: N.A. B: $\{2, 2, +\infty, N.E.\}$ C: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$ D: $\{1, 2, 64, 64\}$ E: $\{1, N.E., 4, 4\}$

9. La funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{per } x < 0 \\ \sin(bx) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$
   risulta continua e derivabile in $x_0 = 0$ scegliendo (a, b) uguali a

   A: $(-1, \pi)$ B: $(1, \pi/2)$ C: N.E. D: $(0, 1)$ E: N.A.

10. Data $f(x) = \big(\log(x)\big)^{\tan(x)}$. Allora $f'(1)$ è uguale a

    A: -1 B: $\tan(\pi) + \sin(1)$ C: $\log(\mathrm{e})^{\tan(1)}$ D: 0 E: N.A.

CODICE=649733

Brutta Copia

CODICE=649733

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

22 luglio 2010

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=189656

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 189656

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=189656

PARTE A

1. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cos(1/x^2)$$
vale

   A: 0 B: N.E. C: N.A. D: 1 E: $+\infty$

2. Se $z\in\mathbb{C}$ è tale che $z^4=-16$ allora l'argomento di z è uguale a

   A: N.A. B: $\{\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4, 9\pi/4\}$ C: $\{\pi/4, 2\pi/4, 3\pi/4, \pi\}$ D: $\{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$
   E: $\{\pi/4, \pi/4+\pi, \pi/4+2\pi, \pi/4+3\pi\}$

3. Il polinomio di Taylor di grado 5 relativo al punto $x_0=0$ della funzione $f(x)=\sin(x^2)$ vale

   A: N.A. B: $1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$ C: $1+\sin(x)\frac{x^4}{4!}$ D: x^2 E: $1+x$

4. L'integrale
$$\int_0^{\pi/4}\sin(2x)\,dx$$
vale

   A: $1/2$ B: N.A. C: 1 D: -1 E: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. La serie geometrica
$$\sum_{n=0}^{\infty}(1/2+q^3)^n$$
converge per

   A: $|q|<1$ B: $-1<q<2^{1/3}$ C: $q\in]\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}, \frac{1}{2^{1/3}}[$ D: $q\in]-1/2,1/2[$ E: N.A.

6. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A=\{n\in\mathbb{N} : \text{la funzione } x^n:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ è convessa}\}$$
valgono

   A: $\{1,2,64,64\}$ B: $\{1,1,+\infty,N.E.\}$ C: $\{2,2,+\infty,N.E.\}$ D: N.A. E: $\{1,N.E.,4,4\}$

7. Sia y soluzione di $y'(x)=4^\pi y(x)$, $y(0)=0$. Allora $\lim_{x\to+\infty}y(x)$ è uguale a

   A: N.E. B: 0 C: N.A. D: π^4 E: $+\infty$

8. La funzione
$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{per } x<0\\ \sin(bx) & \text{per } x\geq 0\end{cases}$$
risulta continua e derivabile in $x_0=0$ scegliendo (a,b) uguali a

   A: $(-1,\pi)$ B: $(1,\pi/2)$ C: N.A. D: $(0,1)$ E: N.E.

9. Data $f(x)=\big(\log(x)\big)^{\tan(x)}$. Allora $f'(1)$ è uguale a

   A: $\tan(\pi)+\sin(1)$ B: -1 C: $\log(\mathrm{e})^{\tan(1)}$ D: N.A. E: 0

10. La funzione $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x^3+x^2$ è

    A: sempre non negativa B: N.A. C: monotona decrescente D: iniettiva E: limitata

CODICE=189656

Brutta Copia

CODICE=189656

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

22 luglio 2010

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=649617

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 649617

	A	B	C	D	E
1	◯	◯	◯	◯	◯
2	◯	◯	◯	◯	◯
3	◯	◯	◯	◯	◯
4	◯	◯	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	◯
6	◯	◯	◯	◯	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯
8	◯	◯	◯	◯	◯
9	◯	◯	◯	◯	◯
10	◯	◯	◯	◯	◯

CODICE=649617

PARTE A

1. La serie geometrica
$$\sum_{n=0}^{\infty}(1/2+q^3)^n$$
converge per

A: $|q|<1$ B: N.A. C: $q \in]-1/2, 1/2[$ D: $q \in]\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}, \frac{1}{2^{1/3}}[$ E: $-1<q<2^{1/3}$

2. Se $z \in \mathbb{C}$ è tale che $z^4=-16$ allora l'argomento di z è uguale a

A: N.A. B: $\{\pi/4, \pi/4+\pi, \pi/4+2\pi, \pi/4+3\pi\}$ C: $\{\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4, 9\pi/4\}$ D: $\{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$ E: $\{\pi/4, 2\pi/4, 3\pi/4, \pi\}$

3. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cos(1/x^2)$$
vale

A: N.E. B: 1 C: N.A. D: 0 E: $+\infty$

4. La funzione
$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{per } x<0 \\ \sin(bx) & \text{per } x\geq 0\end{cases}$$
risulta continua e derivabile in $x_0=0$ scegliendo (a,b) uguali a

A: N.A. B: $(-1,\pi)$ C: N.E. D: $(0,1)$ E: $(1,\pi/2)$

5. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A=\{n\in\mathbb{N} : \text{la funzione } x^n : \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ è convessa}\}$$
valgono

A: N.A. B: $\{1,2,64,64\}$ C: $\{1, N.E., 4, 4\}$ D: $\{2,2,+\infty, N.E.\}$ E: $\{1,1,+\infty, N.E.\}$

6. La funzione $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x^3+x^2$ è

A: limitata B: sempre non negativa C: N.A. D: monotona decrescente E: iniettiva

7. Data $f(x)=\big(\log(x)\big)^{\tan(x)}$. Allora $f'(1)$ è uguale a

A: $\tan(\pi)+\sin(1)$ B: $\log(\mathrm{e})^{\tan(1)}$ C: -1 D: N.A. E: 0

8. L'integrale
$$\int_0^{\pi/4}\sin(2x)\,dx$$
vale

A: 1 B: $1/2$ C: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D: N.A. E: -1

9. Sia y soluzione di $y'(x)=4^{\pi}y(x)$, $y(0)=0$. Allora $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ è uguale a

A: N.E. B: N.A. C: 0 D: π^4 E: $+\infty$

10. Il polinomio di Taylor di grado 5 relativo al punto $x_0=0$ della funzione $f(x)=\sin(x^2)$ vale

A: $1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$ B: $1+x$ C: N.A. D: $1+\sin(x)\frac{x^4}{4!}$ E: x^2

CODICE=649617

Brutta Copia

CODICE=649617

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

22 luglio 2010

- **Scrivere subito nome e cognome e matricola sul foglio risposte e preparare il libretto sul banco per il controllo.**
- **Tempo 30 minuti. Durante la prova non si può uscire dall'aula.**
- **Non si possono consultare libri, appunti, manuali.**
- **Non si possono usare calcolatrici, computer di ogni genere o telefoni cellulari.**
- **Consegnare solo il foglio risposte.**
- **Le risposte valide sono SOLO quelle segnate sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **N.A. significa "nessuna delle altre", mentre N.E. significa "non esiste"**
- **Non usare matite e/o penne rosse sul foglio risposte.**
- **Indicare la risposta nell'apposita maschera con una "X".**
- **Per effettuare correzioni, barrare tutta la linea e scrivere CHIARAMENTE e INEQUIVOCABILMENTE la risposta corretta a destra della linea stessa.**

CODICE=402167

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 402167

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	○
2	○	○	○	○	○
3	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	○
5	○	○	○	○	○
6	○	○	○	○	○
7	○	○	○	○	○
8	○	○	○	○	○
9	○	○	○	○	○
10	○	○	○	○	○

CODICE=402167

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \text{la funzione } x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ è convessa}\}$$

valgono

A: $\{2, 2, +\infty, N.E.\}$ B: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$ C: $\{1, 2, 64, 64\}$ D: $\{1, N.E., 4, 4\}$ E: N.A.

2. La serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1/2 + q^3)^n$$

converge per

A: $|q| < 1$ B: $q \in]-1/2, 1/2[$ C: $-1 < q < 2^{1/3}$ D: $q \in]\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}, \frac{1}{2^{1/3}}[$ E: N.A.

3. L'integrale

$$\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\, dx$$

vale

A: $1/2$ B: -1 C: N.A. D: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E: 1

4. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + x^2$ è

A: N.A. B: iniettiva C: monotona decrescente D: sempre non negativa E: limitata

5. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{per } x < 0 \\ \sin(bx) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

risulta continua e derivabile in $x_0 = 0$ scegliendo (a, b) uguali a

A: $(-1, \pi)$ B: $(0, 1)$ C: N.A. D: $(1, \pi/2)$ E: N.E.

6. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \cos(1/x^2)$$

vale

A: $+\infty$ B: N.E. C: 0 D: N.A. E: 1

7. Data $f(x) = \big(\log(x)\big)^{\tan(x)}$. Allora $f'(1)$ è uguale a

A: N.A. B: $\log(\mathrm{e})^{\tan(1)}$ C: 0 D: -1 E: $\tan(\pi) + \sin(1)$

8. Sia y soluzione di $y'(x) = 4^\pi y(x)$, $y(0) = 0$. Allora $\lim_{x \to +\infty} y(x)$ è uguale a

A: π^4 B: N.A. C: 0 D: $+\infty$ E: N.E.

9. Se $z \in \mathbb{C}$ è tale che $z^4 = -16$ allora l'argomento di z è uguale a

A: $\{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$ B: N.A. C: $\{\pi/4, 2\pi/4, 3\pi/4, \pi\}$ D: $\{\pi/4, \pi/4 + \pi, \pi/4 + 2\pi, \pi/4 + 3\pi\}$ E: $\{\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4, 9\pi/4\}$

10. Il polinomio di Taylor di grado 5 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \sin(x^2)$ vale

A: $1 + x$ B: N.A. C: $1 + \sin(x)\frac{x^4}{4!}$ D: x^2 E: $1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

CODICE=402167

Brutta Copia

CODICE=402167

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 649733

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	●	○	○	○	○
3	○	○	●	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	●	○	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	●	○	○
8	○	○	●	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	○	●

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 189656

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	○	●	○
3	○	○	○	●	○
4	●	○	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	○	●	○	○	○
7	○	●	○	○	○
8	○	○	●	○	○
9	○	○	○	●	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=189656

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 649617

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	○	●	○
3	○	○	○	○	●
4	●	○	○	○	○
5	○	○	○	○	●
6	○	○	●	○	○
7	○	○	○	●	○
8	○	●	○	○	○
9	○	○	●	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=649617

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 402167

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	○	○	●	○
3	●	○	○	○	○
4	●	○	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	●	○	○	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	●	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=402167

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

22 luglio 2010

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\lambda > 0$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{x} = x^\lambda \mathrm{e}^{-x} \qquad x \geq 1$$

Soluzione: L'equazione in questione è equivalente a risolvere $e^{-x}x^{\lambda+1} = 1$. Chiamata $F(x) = e^{-x}x^{\lambda+1}$ si ha $F(1) = 1/\mathrm{e} < 1$. Inoltre $F'(x) = \mathrm{e}^{-x}x^\lambda(-x+\lambda+1)$ si annulla per $x = \lambda+1$. Inoltre la funzione F risulta crescente per $x < \lambda+1$ e decrescente per $x > \lambda+1 > 1$. Il massimo relativo vale $\mathrm{e}^{-1-\lambda}(1+\lambda)^{1+\lambda}$. Tale massimo risulta essere uguale a uno se

$$\mathrm{e}^{1+\lambda} = (1+\lambda)^{1+\lambda}$$

quindi se $(1+\lambda) = (1+\lambda)\log(1+\lambda)$, da cui $\lambda = \mathrm{e}-1$. Si vede facilmente the il massimo cresce con λ e quindi non c'è nessuna soluzione per $\lambda < \mathrm{e}-1$, una soluzione per $\lambda = \mathrm{e}-1$ e due soluzioni per $\lambda > \mathrm{e}-1$.

2. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(t) - y(t) = \mathrm{e}^t\cos(t)$$

Soluzione: Le radici dell'equazione caratteristica sono $\lambda = \pm 1$ e quindi non c'è risonanza. Cercando la soluzione particolare della forma $y_f(t) = a\mathrm{e}^t\cos(t) + b\mathrm{e}^t\sin(t)$ si ottiene facilmente che le soluzioni sono

$$y(t) = e^t c_1 + e^{-t}c_2 + \frac{1}{5}e^t(2\sin(t) - \cos(t))$$

3. Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato e eventualmente calcolarlo

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2(x^2+1)}\,dx$$

Soluzione: il denominatore della funzione integranda non si annulla mai e inoltre $\frac{x^2+x+1}{x^2(x^2+1)} = O(x^{-2}$ per $x \to +\infty$, quindi l'integrale converge. Scomponendo in

$$\frac{x^2+x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)}$$

si ottiene che una primitiva è $\log(x) - \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) - \frac{1}{x}$ da cui

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}(2+\log(2))$$

CODICE=402167

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione regolare convessa. La funzione $[f(x)]^2$ è ancora convessa? In caso di risposta (motivata) negativa, dare delle condizioni sufficienti affinchè anche $[f(x)]^2$ sia convessa

Soluzione: in generale $[f(x)]^2$ non è convessa, per esempio basta prendere $f(x) = x^2 - 1$ e si vede che $[f(x)]^2 = x^4 - 2x^2 + 1$ non è convessa perchè $\frac{d^2}{dx^2}(x^4 - 2x + 1) = 12x^2 - 4$ risulta negativa per $|x| < 3^{-1/2}$.

In generale dato che per ipotesi $f'' \geq 0$

$$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]^2 = 2[f'(x)]^2 + 2f(x)f''(x),$$

la derivata seconda risulta nonnegativa per esempio se $f(x) \geq 0$.

CODICE=402167