Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta di Matematica

Pisa, 30 gennaio 2006

- **Tempo 1 ora.**
- **Non si possono usare calcolatrici.**
- **Segnare le risposte solo sul foglio che si consegna.**
- **Ogni domanda ha una e una sola risposta giusta.**
- **Ogni risposta esatta vale +1, mentre ogni risposta errata vale -1.**
- **Prima di aprire il compito copiare il numero del compito sul foglio che si consegna.**
- **Usare solo penne nere o blu (non matite e/o penne rosse).**

CODICE = 391349

PARTE A

1. La funzione $f(x) = \mathrm{e}^x - x$ è

   A: suriettiva. B: limitata superiormente C: iniettiva D: limitata inferiormente

2. Dati $x = 3^6$ e $y = 2^7$ allora

   A: $x = y + 2$ B: $x \cdot y$ è divisibile per 5 C: $x < y$ D: $x \geq y$

3. L'immagine della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+4}$ è

   A: $\mathbb{R}$ B: $]0, +\infty[$ C: $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ D: $x \geq 0$

4. Calcolare

$$\int_0^{\pi/4} x \sin(2x)\, dx$$

   A: $-\frac{1}{4}$ B: $\frac{1}{4}$ C: 0 D: N.E.

5. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^-} (1 + \pi x)^{1/(2x)}$$

   A: $\mathrm{e}^{\pi/2}$ B: $-\infty$ C: e^{π^2} D: $\mathrm{e}^{\sqrt{\pi}}$

6. Il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x) - x}{\mathrm{e}^{[1+\log(x)]}}$$

   è uguale a:

   A: 0 B: $-1/\mathrm{e}$ C: N.E. D: $+\infty$

7. Calcolare

$$\int_{-1/2}^{0} \arctan(2x)\, dx$$

   A: N.E. B: $\frac{\log(4)-\pi}{8}$ C: $1 + (\mathrm{e} - 1)\log(2)$ D: 0

8. Calcolare il massimo assoluto di $f(x) = -|-x^2 + 4x - 3|$

   A: 0 B: N.E. C: -1 D: 1

9. Determinare inf, sup, min e max della funzione $f(x) = \sin^2(1/x)$ sull intervallo $]0, +\infty[$

   A: (-1,1,-1,1) B: $(0, +\infty, 0, +\infty)$ C: $(0, +\infty, 0, \mathrm{N.E.})$ D: $(0, 1, 0, 1)$

10. La retta tangente al grafico di $y(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$ nel punto $(0, 1)$ è

    A: $y = 1 + x + x^2/2$ B: $y = 1 - x$ C: $y = 1 + \mathrm{e}^{\sin(1)}(x - 1)$ D: $y = 1 + x$

11. L'integrale

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin(x+1)}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx \qquad \text{é}$$

    A: finito e positivo B: $+\infty$ C: finito e negativo D: 0

12. Dire per quali α il limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^\alpha}{\log(\cos(x))}$ è finito e diverso da zero.

    A: $\alpha < 0$ B: $\alpha = 2$ C: $\alpha \geq 2$ D: $\alpha \neq 0$.

13. Sia $f(x) = \sin(x^3)$, allora $f^{'''}(0)$ è uguale a

    A: 3 B: N.E. C: 0 D: 6

14. Il limite $\lim_{x\to 0^+}[\sin(x)]^x$ è uguale a

A: e B: 1 C: 0 D: $+\infty$

15. Una soluzione della equazione $x'(t) = 2t\,(1 + [x(t)]^2)$ è

A: $\tan(t^2)$ B: $\arctan(t^2)$ C: $\arcsin(t^2)$. D: $\sin(t^2)$

16. Quante soluzioni ha l'equazione $\tan(x) + \mathrm{e}^x = \pi/2$ nell'intervallo $]-\pi/2, \pi/2[$?

A: nessuna B: infinite C: 1 D: 3

17. Determinare l'insieme dei punti di continuità e l'insieme dei punti di derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & x \geq 0 \\ \\ 2 - x^2 & x < 0 \end{cases}$$

A: $(x \neq 0, \mathbb{R})$ B: $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ C: $(\mathbb{R}, x \neq 0)$ D: $(x \neq 0, x \neq 0)$

18. Le soluzioni della equazione $x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 6\,t - 5 + \mathrm{e}^{3t}$ sono

A: $c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2\mathrm{e}^{3t} + 2t\mathrm{e}^{3t} - t$. B: $c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2\mathrm{e}^{3t} + t^2\mathrm{e}^{3t} - t$ C: $c_1\mathrm{e}^{2t} + c_2\mathrm{e}^{3t} + t\mathrm{e}^{3t} + t$ D: $c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2t\mathrm{e}^{3t} + t\mathrm{e}^{3t} + t$

PARTE B

19. La matrice inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è uguale a:

A: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} -2 & 3/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ C: N.E. D: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

20. La dimensione dell'immagine della applicazione lineare identificata con la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

è

A: 1 B: 3 C: 4 D: 2

21. Il nucleo della applicazione lineare $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y + z \\ x + y \\ x + 2y + z \end{pmatrix}$ è uguale a

A: $\begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$ B: $\begin{pmatrix} t - s \\ t \\ t \end{pmatrix}$ C: $\mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ D: $\mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

22. Il numero $\frac{6i}{(1+i)^2}$ è uguale a

A: $\frac{9}{25} - \frac{12}{25}i$ B: $-\frac{9}{25} - \frac{12}{25}i$ C: 3 D: 3i

23. Sia e_i, $i = 1, 2, 3, 4$, la base canonica di $\mathbb{R}^4$, il prodotto scalare $< e_1, e_2 + e_4 + e_4 >$ è uguale a

A: 4 B: 1 C: 0 D: $(0, 0, 0, 0)$

24. Modulo e argomento di $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ sono

A: $(1, 5\pi/6)$ B: $(\sqrt{2}, 5\pi/6)$ C: $(\sqrt{2}, -5\pi/6)$ D: $(1, -5\pi/6)$

25. Calcolare il determinante di $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 10 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A: 280 B: 0 C: -280 D: 140

26. La dimensione dello spazio generato da $v_1 = (4, 3, 6, 2)$ $v_2 = (0, 0, 2, 20)$ $v_3 = (1, 0, 0, 3)$ è uguale a

A: 1 B: 3 C: 4 D: 2

27. Dati $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ le soluzioni del sistema

$$A^T v = b$$

sono

A: span$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$. B: $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ C: N.E. D: $v = \begin{pmatrix} 2+t \\ 1-t \\ 3t \end{pmatrix}$